

Henri VanLier, ANTHROPOGENIE

Recherches sur la constitution continue d'Homo
comme état-moment d'Univers

(SGDL 1995 - Quatrième état : janvier 1997)

Chapitre 18 - Les logiques

- A. LES INDEXATIONS PURES DES INDEXABLES SEMIOTIQUES
- B. LA LOGIQUE COMME PRATIQUE ARCHAÏQUE
- C. LA LOGIQUE COMME THEORIE
 - 1. Les logiques de l'échange et du contrat du MONDE 1
 - 2. Les logiques de l'être du MONDE 2
 - 3. Les logiques des termes du MONDE 3
- D. LES REFOULEMENTS DE L'ARGUMENTATION

* * *

Complément : René Lavendhomme, La purification mathématique et logique de
la flèche

A. L'INDEXATION PURE DES INDEXABLES SEMIOTIQUES

Il y a une autre discipline qui a un nom aussi radical que la mathématique, mathematikè tekHnè, c'est la logique, logikè tekHné, technique du logos.

La logique est alors aussi vaste que le logos dont elle est la technique. Elle décrit et évalue d'abord le raisonnement du discours, puis le discours comme tel, enfin la pratique sémiotique en général.

Aussi, prise dans toute son ampleur, elle se distribue selon les trois dimensions thématrices <2A> du signe. (a) Elle envisage les rapports d'un signe avec les autres signes du même système ; ce sont les questions logiques syntaxiques, objets de la SYNTAXE (tattein, sun, ranger ensemble). (b) Elle considère aussi les rapports que, comme thématissant, un signe entretient avec ses thématisés : ce sont les questions logiques sémantiques, objets de la SEMANTIQUE (sèmainein, atteindre une chose par un signe). (c) Enfin, elle étudie les rapports du signe avec les thématisateurs qui le produisent, le reçoivent, l'échangent ; ce sont les questions logiques pragmatiques, objets de la PRAGMATIQUE (prattein, agir). Surtout dans l'usage anglais, le mot logics couvre habituellement ces trois domaines.

Tous les signes sont alors concernés. Car ces trois types de questions se posent quand un peintre produit une représentation quelconque ou quand il peint un cadre dans un cadre ; ou du seul fait que son cadre découpe de telle ou telle manière une situation représentée. Quand un sculpteur taille une image, et aussi quand il veut que sous sa taille apparaisse encore plus ou moins la matière qui reçoit l'image. Quand un musicien produit ses tons, mais également quand il exige ou n'exige pas le silence avant de commencer sa musique. Quand un architecte réalise et manifeste ou voile des fonctions d'habitation, ou qu'il cherche à préparer ses intérieurs par des façades, ou encore qu'il veut que le passant ait sur une façade beaucoup de recul (Versailles) ou peu (palais dans les rues de Rome). Quand Homo erectus produit un biface qui hésite entre le pur outil et l'image massive <7B>.

Il y a donc autant de logiques que de domaines de signes, et même plusieurs logiques par domaines. Ainsi, les signes particuliers que sont les index de la mathématique appelèrent une logique particulière du fait que ce sont des signes vides, comportant surtout une syntaxe, sans guère de pragmatique, et même sans sémantique, si on excepte les sémantiques construites à l'intérieur de la mathématique.

Néanmoins, c'est le dialecte qui a suscité le plus immédiatement des questions logiques, vu qu'il a la propriété remarquable de désigner ses objets avec des degrés d'approximation, des modes d'existence, des catégories du possible, des réductions (x en tant que x), des effets gigognes (je dis que je dis que je dis...), et qu'il peut aller jusqu'à parler de lui-même. C'est vrai que le langage gestuel a des performances semblables, et que sa maturation est presque identique pour l'ordre et pour la durée de ses étapes, mais le langage parlé a une communicabilité qui se prête davantage à l'examen. Et c'est bien du substantif logos dans son sens premier de parole et de raisonnement parlé ou écrit qu'a été

dérivée la logikè teknè, puis le latin logica, qui a donné notre logique ; comme c'est au sens restreint de logique du langage que pense spontanément le locuteur français quand il parle de la Logique de Port-Royal. Le logicien est même disposé alors à donner à logikos le sens tout à fait étroit que visait Aristote quand il opposait les syllogismes logiques (logikoï sullogismoï), réductibles à des règles formalisables, aux syllogismes rhétoriques (rHètorikoï sullogismoï), plus lâches et relevant de ce qu'on appellerait aujourd'hui la logique de l'argumentation.

Ces flottements du vocabulaire ne sont ni fortuits ni paresseux, et tiennent à la nature des choses. Dans l'anthropogénie de la logique, il ne faut pas négliger l'ampleur de son sens plein anglo-saxon de syntaxe, de sémantique et de pragmatique concernant tous les signes, mais avec une attention particulière au sens réduit et même strict qu'elle a eu en grec, et qu'elle a encore en français, de logique du discours, et en particulier du discours logique, par opposition au discours argumentatif.

B. LA LOGIQUE COMME PRATIQUE ARCHAÏQUE

Partons naïvement de signes qu'on trouve fréquemment dans les traités de logique (et de mathématique), et qui trahissent des indexations fondamentales, qu'il est commode de chiffrer ainsi :

E pointe l'EXISTENCE, et "Ex" se lit "il y a un x qui" ;
 A pointe l'ESSENCE, et "Ax" se lit "tout x", "quel que soit x", "pour tout x" ; et AxR(x) se lit "tous les x sont rouges" si "R(x)" se lit "x appartient à la classe des rouges", "x est rouge" ;
 ~ pointe la NEGATION, et "~p" se lit "négation de la proposition p".

Dans les mêmes traités, on trouve, entre ces trois opérations, des équivalences, \Leftrightarrow , dont voici les quatre admises par la logique classique, et où la logique intuitionniste n'admet que la quatrième :

$$A \Leftrightarrow \sim E \quad E \Leftrightarrow \sim A \quad E \sim \Leftrightarrow \sim A \quad A \sim \Leftrightarrow \sim E$$

Ce qui doit retenir l'anthropogénie, c'est que les opérateurs fondamentaux, E, A, ~, \Leftrightarrow , sortent directement de la situation d'Homo transversalisant, indexateur, indicialisant, conceptualisant (associatif et neutralisateur). En effet, dans un champ indiciel plus ou moins neutralisé, pas d'indexation sans position d'EXISTENCE du pointé. Ni sans position d'ESSENCE minimale (l'appartenance à un ensemble) ou qualifiée (l'appartenance à une classe). Ni sans NEGATION explicite ou du moins possibilisée de ce qui n'est pas indexé. Ni sans EQUIVALENCES entre ces opérations.

On ajoutera seulement qu'à ces opérateurs des panoplies techniques <1B> durent vite s'adjoindre ceux des protocoles techniques <1B> : "si...alors". Puis ceux, à la fois panopliques et protocolaires, qui distinguent les catégories de la possibilisation <4C> : le factuel, le possible, le certain, le probable, voire le nécessaire, bref les objets de la logique théorique dite modale ; et les modes d'existences : sérieux-jeu, bluff-soumission, exploration-coquetterie, etc <4B>.

Ainsi, les logiques théoriques, ainsi que les ontologies et les épistémologies qui en sont les résonances et les fondements, expriment et

formalisent les opérations en panoplie et protocole pratiquées d'instant en instant par tous les spécimens hominiens. Et, de même qu'un locuteur n'applique pas des règles grammaticales et lexicales <13H1>, le technicien et le locuteur n'appliquent pas non plus des règles logiques. Celles-ci ont été extraites après coup de la pratique indexatrice, indicialisante, neutralisatrice et classificatrice d'Homo technicien et sémiotisant. Et d'autant plus tard que les opérations étaient plus complexes. La formalisation de la logique modale ("il est nécessaire", "il est contingent", "il est probable", etc.) est récente et inchoative. Celle des modes d'existence n'est guère envisagée que dans la théorie des jeux, des tactiques et des stratégies, laquelle ne dispense pas d'un décideur final.

Ainsi, sans aucune logique théorique, donc sans règles logiques, les enfants de sept ans se plaisent à des exercices sémantiques aigus, où de bouche à oreille, et dans l'hilarité générale, le jus de tomate devient le jus de cerveau, le jus de meuble, etc. jusqu'au jus de jus, qui déclenche une joie sans borne. Ils perçoivent sans faillir les quatre ou cinq retournements affirmatifs et négatifs de la sentence où leur grand-père se vante sentencieusement d'être le plus grand imbécile du monde. Ils ne sont nullement inquiétés par le prétendu paradoxe de "je mens", dont ils repèrent les diffractions en : "je viens de mentir dans ce que je viens de dire", "je vais mentir dans ce que je vais dire", "je suis menteur aujourd'hui ou à cet instant", "jemens toujours" au sens de "je mens presque toujours, souvent, parfois", sans compter les subtilités de "mensonge" comme mot et du mensonge comme acte, etc.

L'adulte ne perd ni cette compréhension ni ce goût de logique opératoire, et s'il est un Crétois ordinaire, et non un sophiste crétois, il entend d'emblée dans la proposition "Tous les Crétois sont menteurs" ces autres propositions : "Le Crétois est menteur", "En Crète on ment comme on respire", "Ce n'est pas d'un Crétois qu'il faut attendre la vérité", "En Crète il n'y a que le mensonge qui soit riche", "La Crète c'est le Midi", "Exagération vaut mensonge", etc., dont les différences ne sont pas pour lui sous-jacentes, tant elles sont comportées par le dire en tant que dire. Ainsi, l'exercice logique fleurit dans toutes les civilisations, comme le confirme l'omniprésence du sourire, du rire, du fou-rire. Il est significatif de la structure du dialecte que des enfants de trois ans, ne sachant que très peu de mots, aient déjà un sens aigu de l'humour <20E4>, lequel suppose une perception aiguë des dimensions logiques.

L'extrême élémentarité hominienne des opérations logiques et la virtuosité de leur pratique chez les enfants actuels font penser qu'elles durent intervenir très tôt dans l'anthropogénie, dès qu'Homo fut maître d'un langage massif et gestuel suffisants. Sans doute chez Homo erectus. Voire chez des spécimens d'Homo habilis.

C. LA LOGIQUE COMME THEORIE

Cependant, à travers l'anthropogénie, la pratique logique a débouché sur l'exercice logique, puis la contestation logique, puis la théorie logique latente, puis la théorie logique déclarée.

1. Les logiques de l'échange et du contrat du MONDE 1

Nous ne saurons jamais quel fut le degré de querelle logique d'*Homo erectus*, disposant sans doute du langage massif, ni d'*Homo sapiens sapiens* au paléolithique supérieur, disposant sans doute d'un protolangage détaillé <13J>. Mais les établissements au sol et plus encore les orchestrations topologiques des grottes peintes <10D> ont peut-être donné lieu non seulement à discussions (quaterne, ébranler, dis, duo) moyennant une pratique et un exercice logique, mais aussi à de premières qualifications abstraites des propositions en conflit, en un pressentiment d'une théorie logique. Les hiérarchies des groupes de Primates, quand elles devinrent les instances de la famille et les rôles de la clientèle <1F2>, purent avoir amorcé le même glissement.

En tout cas, les jetons de comptage du néolithique <14A>, c'est-à-dire les premiers échangeurs neutres <4D3>, de même que le schématisme générateur des tectures cadrantes de Catal Hüyük <11D> se prêtaient à quelque calcul propositionnel en cas de différend. Les jeux logiques des sociétés actuelles sans écriture, tels les Esquimaux, où l'on voit la pratique passer à la règle, inciteraient à le penser. Mais le langage détaillé néolithique <13J> était-il assez mûr pour faire autre chose que pressentir le passage?

Enfin, une première théorie logique fut certainement instiguée par les écritures langagières et le sous-cadrage général à Sumer, en Egypte, en Chine, en Amérique pré-colombienne. Ecrites par mots, par lignes et par colonnes, les propositions du langage apparaissaient maintenant comme des blocs inversables, composés de sous-blocs inversables, ostensiblement transposables, affirmables et niables. On imagine mal les prêtres égyptiens, si pointus dans la défense parlée et écrite de leurs dieux locaux, ne pas procéder à quelques formalisations logiciennes dans leurs querelles de théologiens.

2. Les logiques de l'état-être du MONDE 2

Mais tout ceci ne sort pas du continu proche du MONDE 1 <9B>, et c'est avec le passage au continu distant du MONDE 2 <9B> que la logique théorique explosa en même temps que la mathématique. Dans la "bonne distance" du nouveau regard, scénique et théâtral <10G1>, les figures dessinées par les cailloux (calculi, calculs) et les longueurs des cordes de cithare proposaient des harmonies (internes) et des analogies (externes) que les Pythagoriciens voulaient croire strictement décidables <12E>.

La logique ainsi mise en branle eut deux grands caractères. Elle donna au principe du tiers exclu un tranchant absolu ; et elle se prononça sur l'étant en tant qu'étant (on è on), le véritablement étant (to ontôs on). En d'autres mots, elle fut à la fois une épistémologie et une ontologie. Ou encore, elle se perçut comme l'instrument d'une épistémologie de l'être. Cela concordait avec les nouvelles tectures ambiantes, où les formes se prélevaient adéquatement sur les fonds <9B2>, et avec une écriture devenue transparente et complète <14D>, où le désignant s'évaporait devant le désigné. La langue grecque utilisa toutes ses ressources casuelles de dialecte indo-européen, ses articles, ses mots composés, pour crier aussi fort que possible (moyennant l'éclat de ses nombreuses voyelles) l'opposition exclusive, l'implication nécessaire, la saisie intrinsèque, la saisie précise, et même pour exiger, en un phénomène langagier unique, que toute sentence indique à son début son lien logique avec la précédente. La rigueur logique fit la dignité de l'Anthropos, en contraste avec le débraillé logique Des dieux.

Presque d'emblée surgit le vers de Parménide : "l'étant est, le non-étant n'est pas". Les échos de cette culmination de l'ontologisme et de la disjonction exclusive retentirent durant tout le temps du MONDE 2. Car c'est bien l'être tranché que visent Platon, puis les néo-platoniciens, quand ils logicisent sur l'Un et le Multiple. C'est parce qu'il veut penser à la fois le devenir des vivants et leur appartenance à des genres éternels qu'Aristote édifie la théorie du syllogisme, où chaque phénomène singulier, énoncé dans une mineure, est subsumé sous une généralité, énoncée dans une majeure, pour obtenir dans la conclusion une vérité comme correspondance de l'intellect et des choses ; et c'est comme biologiste ontologisant qu'il est conduit à distinguer pour les propriétés leurs signes seulement extrinsèques (semeïa) et leurs signes intrinsèques (tekmèria), et spécule du même coup sur le contingent et le nécessaire. C'est encore parce qu'ils estimaient que le monde est une consécution d'états A et B reliés par une causalité ontologique que les stoïciens édifièrent leur logique du "si...alors", avec sa conséquence vraie : si non-B alors non-A ; et sa fausse conséquence (fallacia consequentiae) : "si non-A alors non-B". Et les médiévaux déclencheront une des batailles logico-ontologiques les plus vives et les plus longues de l'histoire hominienne, celle dite des universaux, d'est-à-dire des "réalistes" et des "nominalistes", parce que leur ontologie avait besoin de savoir si la généralité des mots n'était qu'une commodité "nominaliste" du langage ou bien exprimait quand même une certaine généralité "réaliste" des choses, les rendant ainsi intelligibles comme l'oeuvre d'une pensée divine ; cette question fut encore le problème central et bouleversant du logicien américain Peirce autour de 1900. Enfin, c'est par un autre croisement d'ontologie et d'épistémologie, et même le plus étroit, que Descartes balaya toutes les logiques antérieures, estimant qu'il n'y avait qu'à faire attention, à parler clair, à se souvenir sûrement de ce qui a été dit, bref à avoir du "bon sens" et de la "méthode", pour toucher l'existence du "je suis" avec ses conséquences de plein fouet.

La logique disjonctive exclusive ontologisante donna lieu en Occident à un véritable héroïsme logique, aussi intense et moins aléatoire que l'héroïsme militaire. Car c'est héroïquement que Zénon, prenant Parménide au pied de la lettre, conclut que le mouvement, vu qu'il implique du non-être successif, est un opinion (doxa) et non un "étant étantement étant" (on ontôs on) : pensons-y, la flèche ne parviendra jamais jusqu'au mur, puisque après avoir parcouru la moitié de la distance, elle devra parcourir la moitié de la distance restante, et ainsi de suite ; de même, Achille ne rejoindra jamais la tortue, puisque quand il sera là où elle était quand il est parti, elle sera déjà plus loin quand il repartira, et ainsi de suite. A la fin du MONDE 2, deux millénaires et demi plus tard, Bergson s'inquiétera toujours de répondre à Zénon.

Et c'est aussi l'héroïsme logique qui, lors de l'avènement du christianisme cocréateur au début du XI^e siècle, produisit l'argument ontologique chez saint Anselme. On y voit des mots-concepts convenablement choisis et disposés exprimer une essence impliquant une existence, celle de Dieu. Thomas d'Aquin, puis Kant, dénonçèrent ce passage, mais leur critique passe sans doute à côté de la cible. En effet, c'était toute l'épistémologie latente du MONDE 2 qui invitait à croire que les concepts ou idées étaient vraiment dans l'être, de l'être, en particulier comme acte de cet portion remarquable de l'être que sont les esprits. En sorte que les idées d'infini pour Anselme, de parfait

pour Descartes, de substance pour Spinoza, de nécessaire (ce qui ne peut pas ne pas être) pour Leibniz semblaient appartenir déjà, par leur statut d'idées en acte, à l'être existant, et n'avaient plus alors qu'à être sondées pour que s'y découvre Dieu non seulement comme essence envisageable, mais comme essence vraiment possible, laquelle, pour être ainsi possible, impliquait en ce cas l'existence réelle, spontanée, - puisqu'il était (ontologiquement) contradictoire que pareil être ait une cause extérieure à soi. Après 1900, Russell appartenait encore assez au MONDE 2 pour saisir cette logique, sinon pour l'approuver.

Du reste, Kant crut lui aussi à une géométrie vraie-décidable, à une arithmétique vraie-décidable, à une physique vraie-décidable. Et cela à partir d'une esthétique (des formes a priori de la sensibilité) et d'une analytique (des catégories de l'entendement) qu'il déclare toutes deux transcendentales, c'est-à-dire préalables à la saisie de tout objet (censé réel) comme objet (censé réel).

Enfin, Hegel proposa le paroxysme du MONDE 2, puisque chez lui la logique engendre l'ontologie, et l'ontologie est devenue une logique en mouvement. Du coup, la pratique et la théorie logiciennes ont le pathétique d'une histoire ; non seulement toute détermination est négation, comme chez Spinoza, mais la négation est tragique, et souvent sanglante. Dans le meilleur des cas, elle traduit le creux d'un vide, d'un appel, d'un manque, qu'un siècle plus tard, quand on renoncera à le combler, on dira existentiel (Sartre), voire psychanalytique (Lacan).

Cette conclusion pathétique des logiques du MONDE 2 a l'intérêt de rappeler à l'anthropogénie le mouvement général de la logique, qui va vers une pureté de plus en plus pure, comme sa soeur mathématique, mais en continuant toujours de se propulser à partir de la charge (carricare, véhiculer) physique et sémiotique des index <3B2>, charge qui fait d'eux, moyennant leurs effets de champ perceptivo-moteurs et logico-sémiotiques, les fondements derniers du pouvoir, de la pulsion de pouvoir, et du reste de tout pathos d'existence, et en même temps leur donne assez d'indépendance pour faire d'eux, une fois déchargés, de "bonnes formes" parfaites : cercle, triangle, 0, 1, 2... Le verbe katègoreîn, d'où vient catégorie, voulut dire blâmer, accuser en justice, trahir-dévoiler, avant de signifier attribuer, affirmer.

3. Les logiques des termes du MONDE 3

C'est avec cet ontologisme latent mais constant du MONDE 2 qu'Homo autour de 1900 va commencer de rompre, à travers bien des ambiguïtés.

Les ruptures se produisirent d'abord, nous l'avons vu, dans la mathématique, à l'occasion de l'axiomatique, où la notion de vérité fut remplacée par celle de cohérence ou consistence, visant non le rapport d'un système de signes à une réalité extérieure, mais le fait qu'il n'implique pas de contradiction interne <15D5,6>. Ceci conduisit à se demander si cette cohérence était elle-même décidable, et à conclure bientôt qu'elle ne l'était pas à l'intérieur d'un système "pas trop pauvre", contenant par exemple l'arithmétique : "On démontre que dans l'arithmétique on ne pourra jamais démontrer qu'elle est cohérente", "Dans l'arithmétique on peut toujours énoncer une proposition indécidable" (Gödel, 1931). En effet, pareille démonstration de cohérence suppose une formalisation, laquelle ne peut s'opérer que moyennant un métalangage (langage sur un langage) où l'on construira d'éventuels modèles, dont Tarski a fourni à la fois des exemples et une théorie.

Parallèlement, furent édifiées des logiques diverses : faibles, minimales, modales, épistémiques, etc., dont certaines se montrèrent mathématiquement fécondes. Par exemple, la logique intuitionniste permit d'interpréter l'axiome de Kock-Lawvere, portant sur l'ensemble D des éléments de carré nul dans l'anneau R modélisant la droite, et permit de construire une géométrie différentielle synthétique. En ce cas, la logique générale, opérant comme logique axiomatisée de la mathématique, faisait avancer une mathématique déjà axiomatisée (Lavendhomme, Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry, 1996).

Ces logiques mathématiciennes eurent des contrecoups à travers la logique langagière. (a) Dans la syntaxe, dès le début du XIXe siècle, les algèbres de Boole avaient montré comment la disjonction, la conjonction, la négation peuvent s'exprimer respectivement comme réunion, intersection, complémentation ; les logiques des quantificateurs raffinèrent ce dispositif. (b) Dans la sémantique, sur la lancée de la "caractéristique universelle" de Leibniz, des efforts furent faits pour définir des "traits" sémantiques fondamentaux. (c) Dans la pragmatique, des logiques modales apportèrent des contributions indirectes à la distinction entre les dénnotations et les connotations de l'interlocution.

Cependant, dans la plupart de ces cas, ce que le logicien parvenait à formaliser, par exemple sur le nécessaire et le contingent, resta très en deçà de la subtilité des locuteurs courants, et plus encore des locuteurs raffinés qu'étaient par exemple les théologiens médiévaux. Et René Thom a sans doute raison d'affirmer que les choix des locuteurs courants excèdent de toutes parts les algèbres de Boole.

Tarski a montré, dans les années 30, que si le langage courant comportait le mot "vrai" et l'appliquait pertinemment à ses propres énoncés, on ne pouvait formaliser cette situation et introduire formellement un tel prédicat de vérité. Voici quelque chose de son argumentation. Partons de la supposition que la proposition la neige est blanche est vraie si et seulement si (ssi) la neige est blanche ; ce "ssi" est la moindre des choses qu'on puisse exiger s'il s'agit de décidabilité. Or, en appliquant cette exigence à la proposition "je mens", cela donne : la proposition je mens est vraie si et seulement si (ssi) je mens. Ce qui est inconsistant, puisque, si la proposition "je mens" est vraie parce qu'elle émane vraiment d'un menteur, elle est fausse pour la même raison.

Et en effet, comme l'anthropogénie du langage le montre bien <13G>, le locuteur qui dit que la neige est blanche ne pense, ne communique, ne ressent nullement que "la proposition la neige est blanche est vraie si et seulement si (ssi) la neige est blanche" ; en d'autres mots, il ne croit nullement qu'elle soit décidable au sens des formalismes et des terminismes. Il émet, au contraire, un certain nombre de mots destinés à obtenir un certain effet concernant (cernere, cum) certaines performances en situation dans une circonstance sur un horizon <1B2-3>, par exemple celles d'une eau qui a formé des fractals moyennant une certaine vitesse de refroidissement et dont la blancheur prend des teintes très différentes selon qu'on est en train de parler de la retraite de Russie, où la neige était rougie du sang des mourants, ou de stations des sports d'hiver, où elle est noircie par les skieurs, à moins qu'elle soit rougie ou rosie par un coucher du soleil, etc. Ce vague efficace du dire est patent chez les locuteurs chinois, déclaratifs à cet égard. Mais aussi chez tous les locuteurs du monde.

Somme toute, il a fallu l'épistémologie disjonctive très particulière du MONDE 2, et un accès de malhonnêteté polémique contre les protestants, pour que Bossuet s'écrie sans broncher : "Il a dit ceci est mon corps, c'est donc son corps ; il a dit ceci est mon sang, c'est donc son sang." Comme, dans notre début du MONDE 3, il aura fallu l'impitoyable transformation des mots en termes par une linguistique traductionnelle <12H1> visant à construire des machines de traduction, pour que des courants dits néo-positivistes s'avisent d'interroger la validité du langage courant à partir de la décidabilité, affaire de cohérence-consistance, plutôt qu'à partir de la vérité, affaire de réel-réalité, toujours relative, situationnelle, circonstancielle, en approximation provisoire, assurément dans la vie ordinaire, mais même dans la science la plus exacte, c'est-à-dire la plus purement indexatrice. Et cela par la nature des choses, et aussi par la nature du dire en tant que tel. Dire vient du latin dicere, de même racine que le grec deiknunai, montrer. Montrer est à la fois plus humble et plus riche que démontrer. Il n'y a de décidabilité, et donc de démonstration stricte, que des signes vides que sont les index purs, et non des signes pleins, fuyants par leur prégnance même. La formule de Lacan "De la vérité il n'y a que mi-dire" gagne à être retournée : "Il n'y a de dire que de mi-vérités".

Le fait qu'aujourd'hui un très grand nombre de phrases contenant les mots "vérité" et "dire" sont sémantiquement mal formées, c'est-à-dire laissent flotter de quelle vérité et de quel dire on parle, est un symptôme parmi d'autres des difficultés qu'il y aura eu pour les spécimens hominiens à passer du continu distant du MONDE 2, où en Occident ils sont encore à demi immergés, au discontinu du MONDE 3, où ils émergent à peine.

Elles prouvent peut-être aussi tout simplement la difficulté générale qu'il y a pour Homo à saisir la nature du dialecte comme tel <13>, qui est sa ressource la plus large, et donc aussi la plus difficile à cerner, parce que c'est un système où les structures ne s'exercent qu'en se signifiant provisoires, où les restructurations sont sans cesse aussi considérables que les structures <IIIintr>. Ceci fait l'humour de tout langage qui demeure courant ou naturel. L'humour <20E4> est la perception et l'exercice communs aux interlocuteurs du caractère protéiforme de toute interlocution. Dès que le logicien du langage oublie d'être humoriste il rencontre la folie et la paranoïa sous leur forme non seulement ordinaire, propre à tout spécimen hominien, mais sous une forme aiguë. Celle qui a menacé Gödel et épié Wittgenstein.

D. LES REFOULEMENTS DE L'ARGUMENTATION

* * *

Somme toute, comme la pratique et l'exercice logiques sont connaturels à tout spécimen hominien, la théorie logique n'a guère fleuri que dans des moments de crise de l'épistémologie ou des moments de gloire de l'ontologie. Crise épistémologique du dialecte et du geste chez les sophistes grecs, des universaux chez les théologiens médiévaux,

des fondements de la mathématique, des sciences exactes et plus généralement de la vérité tout au long du XXe siècle. Au contraire, chez Aristote et chez Leibniz, triomphe d'une ontologie neuve et puissante, que l'épistémologie venait confirmer et vulgariser.

Complément

René Lavendhomme

LA PURIFICATION MATHEMATIQUE ET LOGIQUE DE LA FLECHE

Il n'est pas indifférent à l'anthropogénie de s'arrêter au destin de la flèche à travers la mathématique et son écriture.

Au départ, il s'agit d'un outil, pointe de masse ou arme de chasse, mais comportant implicitement une image massive qui a la particularité d'indiquer un sens qui la déborde par sa fonction technique mais aussi par la sollicitation qu'elle exerce sur le système visuel d'Homo en raison de sa forme : par dessus les mains manipulatrices, le regard indexateur et indicialisant d'Homo y va vers la pointe.

Ensuite, sur les parois peintes du paléolithique, où elle apparaît comme image détaillée, la flèche est un trait-point complété d'une indication de sens par quelques autres traits-points obliques situés à son extrémité ou sur son corps. Là, à nouveau, l'indication temporelle d'un mouvement directionnel est obtenue par une polarisation du système visuel et par l'évocation d'une fonction technique, le perçement. La charge rituelle, chasserresse ou sexuelle, est considérable.

En effet, avec son mouvement implicite, la flèche signe va d'un "ici" à un "là", lequel tantôt est particulier, comme un point d'arrivée concret, tantôt est général, comme un ailleurs. Dans les deux cas, elle déclenche un double effet de champ perceptivo-moteur rudimentaire. Car sa gravitation propre d'image visuelle y est ouverte (étirée), d'une part en raison de celle de l'attracteur "là", d'autre part en raison du mouvement corporel qu'elle induit du fait de son but visé, du fait aussi qu'elle est perçue comme ayant résulté d'un mouvement dirigé vers ce but physique ou mental, et qui fait qu'elle est le signe de piste par excellence.

* * *

Faisant suite au triangle des forces de Stevin (1586), dont descendra le parallélogramme des forces, la flèche image, dans la mathématique du XIXe siècle, a d'abord eu un statut géométrique. Comme il convenait à sa nature conductrice, c'est un vecteur (vehere, conduire en tirant), c'est-à-dire un segment comportant une origine et une extrémité qui ne sont pas interchangeables, et qui donc produisent un sens et une direction. Cependant, par exemple chez Chasles, les segments vectorialisés donnent lieu à une sorte d'algèbre (calcul) géométrique orientée. Et du

coup l'apparition de la flèche nulle, forcée par l'algèbre, trahit qu'on est en train de sortir de la simple image.

Et en effet, avec l'élaboration ultérieure du calcul vectoriel, la flèche développe considérablement ses possibilités d'évocation, ou plutôt de désignation. Grâce à son sens et à sa longueur, la voici en état de représenter toutes les grandeurs intensives : vitesses, forces orientées. Par quoi se faisait jour une première géométrisation de la cinématique, voire de la dynamique du point.

Bien plus, ce premier glissement conceptuel accompli, on ne s'étonnera pas que la flèche ait écrit l'opération logique de l'implication, "si...alors", laquelle part d'un antécédent et aboutit à un conséquent. Cette fois elle perdait son statut géométrique : sa longueur n'importait plus, seule subsistait l'indication d'un point de départ et d'un point d'arrivée non situés spatialement et purement conceptuels. Avaient lieu une déspatialisation physique, puisqu'il ne s'agit plus d'étendue, et la création d'une sorte de spatialisation conceptuelle dans une écriture pure. Ceci évoque le titre de Frege de 1879 : Begriffsschrift (écriture du concept).

* * *

On assista alors à une vraie révolution graphique : la flèche pour désigner la fonction. Etant donnés deux ensembles quelconques A et B, une fonction de A vers B est une correspondance qui à chaque élément a de l'ensemble A associe un élément b bien déterminé de l'ensemble B, élément que depuis Leibniz on note : $f(a)$. L'invention d'écriture fut d'écrire :

<Figure 1>

Dans l'histoire de l'écriture mathématique, il n'y a eu que deux autres inventions de pareille importance. La première, antique, tint dans la mise en usage de lettres pour désigner des objets mathématiques. La deuxième, essentiellement à la Renaissance, tint en de nouveaux signes abrégiateurs : = , +, etc.

La flèche désignatrice de fonction permettra une écriture bidimensionnelle ou même tridimensionnelle. En effet, si

<Figure 2>

sont deux fonctions, on peut les composer en la fonction $g \circ f$, laquelle à chaque élément a de A associe l'élément c de C déterminé par $c = g(f(a))$.

On peut alors donner sens à une phrase comme : Le carré

<Figure 3>

commute. C'est simplement $v \circ f = g \circ u$

Et on peut du même coup écrire aussi une phrase comme : Si le cube

<Figure 4>

commute, et si toutes ses faces autres que la face supérieure ont la propriété P, alors la face supérieure a aussi la propriété P.

Quel est en l'occurrence le statut du cube dessiné? Celui d'une phrase écrite, et non d'un objet extérieur à la langue. En présence du carré syllogistique des scolastiques, ou des cercles d'Euler, ou des graphiques en général, on se trouvait en présence d'un mixte d'écriture et de dessin, croisant une désignation macrodigitale et une désignation analogique. Au contraire, notre dernier cube appartient vraiment à l'écriture.

Et cela moyennant un effet de champ logico-sémiotique. Car, d'une part, l'ordre du macrodigital devient ici pluridimensionnel, il s'ouvre sur l'espace à l'intérieur de lui-même ; le cube dessiné est bien une phrase écrite. Mais, d'autre part, ce cube ne cesse pas pour autant d'être un dessin, une analogie de cube, avec ses faces et ses arrêtes.

* * *

Sans doute commence-t-on là à pénétrer dans le MONDE 3 de l'écriture. Mais, pour y accéder pleinement, une étape restait à franchir. C'était d'abstraire la flèche de sa contiguïté avec la notion de fonction dans ce qu'elle comportait encore d'adhérence à la fonction concrète.

La nouvelle possibilisation a été de considérer que la flèche pouvait inscrire toute transformation adaptée à une situation mathématique définie. Lorsqu'un mathématicien s'intéresse à une structure donnée, il ne vise pas seulement la classe des objets munis de cette structure, mais aussi la classe des transformations adaptées à cette structure. Ainsi les topologues ne s'intéressent pas seulement aux

espaces topologiques, mais aussi, et peut-être surtout, aux fonctions continues. Les opérateurs linéaires sont plus importants pour les algébristes que les espaces vectoriels. Les représentations, ou homomorphismes, de groupes sont au moins aussi fondamentaux que les groupes eux-mêmes. Et chacune de ces transformations, dans le contexte (la circonstance) d'une situation mathématique donnée, peut s'écrire comme une flèche.

On s'aperçoit alors que les classes de ces flèches, - classe des fonctions, classe des fonctions continues, classe des homomorphismes, classe des fonctions différentiables, etc., - ont elles-mêmes une structure algébrique originale. Dans chacune, la composée de deux flèches existe et est une flèche du même type. Dans chacune aussi, chaque objet est porteur d'une flèche "insignifiante", la flèche identité, c'est-à-dire la transformation qui consiste à laisser tout en place.

Pour leur composition, leur source, leur but, leur flèche nulle, la structure de ces ensembles de flèches devient une structure algébrique comme les autres. C'est ce qui, par une audace philosophique peu banale, due à S. Eilenberg et S. Mac Lane, a été nommé une catégorie. Le mot est très fort puisqu'il rattache ce thème mathématique fondamental à ce qu'Aristote avait appelé les catégories (aī katēgoriaī) pour désigner épistémologiquement les différentes classes des prédicats qu'on peut attribuer dans un jugement à un sujet quelconque, grammatical ou réel ; et donc ontologiquement les différentes classes de l'être.

* * *

Mais, même dans une catégorie, on continue à noter des flèches par des flèches, et à dire que le carré déjà rencontré

<figure 5>

commute, c'est-à-dire que $v \circ f = g \circ u$, puisque les flèches se composent sans qu'on sache ce qu'elles "sont", si ce n'est des éléments composables d'une catégorie définie par ses axiomes.

Or ceci ouvre des perspectives très étranges, qu'on rencontre souvent dans la mathématique d'aujourd'hui. Je me contenterai d'un exemple montrant que l'on peut en arriver à dire qu'un concept est l'image en miroir d'un autre, et que cela fait sens. Ainsi appelle-t-on produit de deux objets A et B un objet P muni de deux flèches, u de P vers A et v de P vers B, tel que pour tout objet X muni également de deux flèches, f de X vers A et g de X vers B, il existe une et une seule flèche de X vers P faisant commuter le diagramme :

<Figure 6>

L'image en miroir de ce concept de produit est ce que l'on appelle une somme de deux objets A et B. C'est un objet Q muni de deux flèches u de A vers Q et v de B vers Q tel que pour tout autre objet X muni également de deux flèches, f de A vers X et g de B vers X, il existe une et une seule flèche de Q vers X faisant commuter le diagramme :

<Figure 7>

Il n'est pas nécessaire de savoir ce que pourraient bien être ces objets P et Q pour voir que ces concepts de produit et de somme sont reliés par une propriété purement graphique, purement scripturale, de retournement du sens des flèches. Nous avons donc ici un lieu, dans la mathématique même, où ce n'est pas simplement l'espace qui se mue en signe, mais le signe qui se mue en espace, de par la spatialité même de son écriture. On se trouve en un point d'interférence entre l'espace et la logique.

* * *

On pourrait faire un pas de plus dans cette direction. La flèche ne pourrait-elle pas subvertir la logique et jusqu'au concept d'ensemble?

Car, au niveau le plus élémentaire, la logique a un rapport avec le concept général d'ensemble. L'ensemble des parties $P(M)$ d'un ensemble M est muni d'opérations (l'intersection, la réunion, le complémentaire) qui évoquent clairement les connecteurs logiques classiques (la conjonction, la disjonction, la négation). Pour faire varier la logique, comme nous le suggère la flèche, il faut donc commencer par faire varier le concept même d'ensemble, ce qui conduit aux notions de faisceau et de topos.

Un topos est essentiellement une catégorie E (au sens défini plus haut) qui, outre quelques conditions élémentaires, permet d'associer à chacun de ses objets X un objet $P(X)$, objet des parties de X , jouant à l'intérieur de E le rôle que joue l'ensemble des parties d'un ensemble dans le cas usuel des ensembles. Pour être un peu plus précis, prenons deux objets X et Y de E . Considérons l'ensemble des relations de Y vers X , c'est-à-dire l'ensemble des sous-objets du produit $Y \times X$ (au sens du mot produit que nous venons de décrire). Si nous étions dans les ensembles, une relation de Y vers X serait simplement un ensemble de couples (y,x) d'éléments de Y et X , tandis qu'ici il faut dire que c'est un certain sous-objet de l'objet $Y \times X$. La condition sur l'objet $P(X)$ est alors que l'ensemble des relations de Y vers X soit en bijection, de manière naturelle, avec l'ensemble des flèches de E allant de l'objet Y vers l'objet $P(X)$.

Pour suggérer l'intérêt philosophique et donc anthropologique de ce concept de topos, considérons l'exemple simple des ensembles variants à deux états. Se donner un tel ensemble variant X c'est se donner ce qu'il était avant, disons X_0 , se donner ce qu'il sera après, disons X_1 , mais surtout se donner une fonction f indiquant pour chaque élément de X_0 ce qu'il deviendra après dans X_1 ; autrement dit, f indique pour chaque x_0 de X_0 quel sera $f(x_0)$ dans X_1 . C'est un peu alors comme si le changement intervenait au niveau même du concept d'ensemble. Un ensemble variant est globalement $f : X_0 \rightarrow X_1$. Tout est décrit comme si les ensembles variaient avec un temps simplifié du type $0 \rightarrow 1$, c'est-à-dire un avant, un après, un unique changement, bref une unique transformation.

Dans cette situation très simplifiée, on a à la base la flèche comme un réel, ou comme un temps à deux états. Et on a, au-dessus de cette base, comme une superstructure tout un univers variant avec ses objets (ses ensembles) mais aussi sa logique et sa vérité. Par exemple, dans les ensembles classique il y a un ensemble de valeurs de vérités $\Omega = \{0,1\}$ qui ne contient que deux éléments : le vrai, noté 1, et le faux, noté 0. On peut voir que pour les ensembles variants, - autrement dit dans le topos des ensembles variants, - il y a un ensemble variant de valeurs de vérité

$\Omega = [\Omega : \Omega_0 \quad \Omega_1] \rightarrow \Omega$ où

Ω_1 (l'ensemble des valeurs de vérité d'après) est $[0,1]$,
 Ω_0 (l'ensemble des valeurs de vérité d'avant) est à trois
éléments $\Omega_0 = \{0,?,1\}$,
et la fonction Ω est décrite par
 $\Omega(0) = 0, \quad \Omega(1) = 1, \quad \Omega(?) = 1.$

Autrement dit, ce qui était vrai restera vrai, ce qui était faux restera faux, et ce qui était "?" deviendra vrai. Dans une sorte d'ailleurs absolu par rapport au temps et à l'univers qu'est en somme l'imaginaire du mathématicien, on pourrait donc dire que "?" correspond à la "valeur de vérité" : "cela ne se savait pas encore, mais cela deviendra vrai".

* * *

Cet exemple donne une petite idée de ce que peut être un topos. Mais, la base ne comportant qu'une seule flèche, il est simpliste. Il faudrait considérer un "temps" plus complexe, telle une base formée d'un "temps bifurquant" comme celui du schéma ternaire :

<Figure 8>

Ou un temps représenté par un ensemble ordonné quelconque. On peut aussi accepter diverses transitions entre les "instants" de ce temps généralisé et considérer, entre autres, un "temps" généralisé à seulement deux états mais à deux transitions :

<Figure 9>

Et dire même que la base peut être une catégorie quelconque. Ou finalement, en un sens qui serait à préciser, que la base est un "espace" ou un "site" quelconque.

C'est ce cas spatial qui fut au départ de la notion de topos telle que A. Grothendieck l'introduisit en 1960 pour les besoins de la géométrie algébrique. En 1965, F.W. Lawvere définissait son extension logique, et notamment le rôle privilégié de l'objet Oméga des valeurs de vérité. L'étymologie est riche de sens : le topos grec était un lieu animé par un événement : l'endroit qu'on foule, qu'on occupe, qui est le siège d'un mal, qui donne accès à. Du coup, dès Isocrate et Eschine, topos désigna le fondement d'un raisonnement quelconque, jusqu'au koinos topos, d'où vient notre "lieu commun".

Destin exemplaire que celui de la flèche, qui d'objet-outil passe à l'image massive, puis devient comme le paradigme de l'index. Elle déclenche un champ perceptivo-moteur, puis logico-sémiotique, pour constituer aujourd'hui, dans le MONDE 3, la base de tout système.

(25-6-1995 et 5-2-1996)