Henri VanLier, ANTHROPOGENIE

Constitution continue d'Homo comme état-moment d'Univers
(SGDL 1995 et 1998 - Cinquième état : mai 1998)

Chapitre 18 - Les mathématiques

2. Une question épistémologique et ontologique

N-B : Dans les Compléments d'Anthropogénie (chapitre 30), on trouvera une étude de René Lavendhomme, La purification mathématique et logique de la flèche, qui illustre la perspective de présent chapitre.

* * * * *

Les index, introduits par la stature d'Homo dans l'Univers, sont des signes vides, qui donc ne sont pas perturbés ou troublés par leurs désignés, comme c'est le cas pour les indices, les images, les noms de genre et de qualités. D'autre part, ils ont une charge propre suffisante pour les rendre largement indépendants des effets de champ ambiants ; ils peuvent ainsi devenir facilement de "bonnes formes", comme des cercles, des rectangles, des sinusoïdes, des chiffres, des signes d'opérations. Enfin, bien qu'ils s'expriment aussi de façon gestuelle et parlée, ils tiennent remarquablement dans l'écriture, d'autant qu'ils sont réductibles à des traits et à des points, lesquels suffisent à produire les figures, les chiffres, les signes d'opérations.

Pour ces trois raisons, et d'autres qui en découlent, les index sont aptes à exprimer des indexations adéquates, et à faire que ces indexations s'appliquent l'une sur l'autre adéquatement, ou deviennent fonction l'une de l'autre. Ainsi, Homo fut invité très tôt, en tout cas depuis les empires primaires, à édifier une théorie générale des indexations pures, et une pratique absolue des index purs. C'est cette démarche de purification et de généralisation que l'anthropogénie vise sous le nom de mathématique.

A. LE TRAIT-POINT(S) CONCRET

L'anthropogénie de la mathématique commence alors par l'éloge du trait, lequel comporte et entraîne l'éloge du point.

1. Le trait et le point. Position, inclusion, mesure

Le trait est souvent le résultat d'un point, qui est son point de départ, à partir duquel il se tire. Ce point est parfois très marqué, comme dans l'écriture cunéiforme, où le style du scribe s'enfonce d'abord fermement dans l'argile, pointe celle-ci, et de là tire le trait. En ce cas, le trait tiré résulte d'un déplacement du point jusqu'à un autre point, son point d'arrivée. Entre les deux extrêmes, il est comme un cordon, un fil de lin (linum), une ligne (linia, linea). En mouvant cette ligne, il engendre des surfaces, qui engendrent des volumes, selon la suite : point, ligne, surface, volume. La ligne (grammè) est une longueur (mèkos) non épaisse (aplatHes), définit Euclide.

Dans cette vue, le point est progressivement apparu à Homo comme l'index ultime : celui du départ et de l'arrivée, du retour, de la station, de la proximité et de l'éloignement, de l'intersection, de la bifurcation, de la boucle qui se ferme, de la décision minimale. Comme aussi le minimum d'acte (le trait le plus court), le minimum perçu dans le visible et le tactile, le minimum de déterminations, l'absence de partie, le point est ce dont il n'y a pas de partie (meros), dit Euclide. En grec, c'est le même mot sèmeion qui dit "signe" et "point", signe minimal. On comprend ainsi le rôle dans la ponctuation du phrasé, et le français en a conçu sept modalités : point simple, point et virgule, deux points, point d'exclamation, point d'interrogation, points de suspension. L'alphabet éthiopien ancien séparait les mots par deux points superposés. En arabe, comme signe épicritique, sur et dessous le trait, il fait basculer la portée des consonnes.

Cependant, anthropogéniquement, le point lui-même est le résultat d'un trait, de la piqûre d'un dard. C'est ce que le grec a marqué en désignant le point le plus fécond, le centre d'un cercle, par "kentron", de la même racine que "kentein", poindre d'un aiguillon ou d'un dard d'abeille. Ce que le latin a confirmé en gardant "kentrum" (centrum, centre), et en y ajoutant "punctum" (point), autre piqûre d'aiguillon-dard (pungere, poindre). L'anglais "point" et l'allemand "Punkt" ont les mêmes dénotations et connotations. Du reste, la façon la plus stricte d'obtenir un point est de provoquer l'intersection de deux traits.

Aussi le conflit du trait et du point, c'est-à-dire le choix de l'un ou de l'autre comme élément premier ou ultime, ou encore la volonté d'engendrer l'un à partir de l'autre, court à travers l'anthropogénie. Les Chinois ont remplacé par un trait court le point, trop fixement pointu pour le naturalisme transcendantal de leur ontologie et de leur épistémologie, qui postule des disjonctions et des négations inclusives (wu), ou transformations réciproques (yi) yin-yang. Par contre, le point devait être l'archétype dans la transcendance inconditionnelle de l'Islam. L'Egypte accentua tantôt l'unité de l'oeil solaire, dans la période amarnienne et dans son Livre des morts, tantôt la multiplicité des traits-rayons qui en sortent. Peut-être l'écriture cunéiforme nous impressionne-t-elle tant parce qu'elle conjoint le point et le trait au plus étroit. Dans les écritures sémitiques primitives, l'ayin, qui a donné l'omicron grec (/o/ court), était un cercle avec un point au milieu, continuant le pictogramme de l'oeil.

Le débat sur la primauté du trait et du point a couvert l'anthropogénie de la mathématique depuis au moins les Pythagoriciens, qui tentèrent d'établir des équivalences entre les figures de la géométrie, composées de traits, et le calcul des calculi, petits cailloux figurant des points virtuels, jusqu'au calcul infinitésimal et à la théorie des ensembles. Laissons à cet égard les débats de Platon et d'Aristote, dont les choix s'inspirent de vues philosophiques. Il reste que, si le trait, à ses extrémités et à ses croisements, engendre fatalement le point, celui-ci par contre n'engendre le trait qu'en tendant vers ou à (ad) lui, qu'en se multipliant ou en se déplaçant "vers" ou "à", en un tracé physique ou mental, exotropique ou endotropique, dont le mot trait dérive. La notion de voisinage d'un point, qui ouvre la topologie, débouche de même sur celle de chemin. En grec, le stoïcheïon, l'élément, n'est pas d'abord le point, dit sèmeïon, mais un petit trait.

Ainsi le trait-point(s), c'est-à-dire le trait avec un point à une extrémité, ou deux points à ses deux extrémités, - et dont on voit assez qu'il est supposé par toute mesure et même par toute application (mapping), - déclenche la théorie générale des indexations et la pratique absolue des index, c'est-à-dire la mathématique. Et il est aussi décisif dans la logique, puisque c'est lui qui exprime les basculements entre affirmation et négation. En français, pour nier quelque chose, ou bien on refuse le pas (passum), ce trait de base produit par la bipédie d'Homo : "non...pas", "ne...pas", "il n'y en a pas". Ou bien on refuse le point (punctum) : "non...point", "ne...point", "il n'y en a point".

Dans une formule simplifiée mais efficace, on peut dire que, si le point est la brique ultime dont la neutralité se prête à ce que le mathématicien en construise ses variétés avec un minimum de présupposés, le trait, comme tracé et tracement (chemin et proximité), est le moteur qui fait que quelque chose se passe entre ces neutres, lesquels sont si neutres que de soi ils seraient inertes.

La topologie, dit-on, étudie les rapports de position et d'inclusion sans prendre en compte la mesure, qui intéresse les autres champs de la mathématique, tels la géométrie euclidienne, l'algèbre, etc.). Les trois concepts-indexations natifs de la mathématique sont donc la position (voisin, moins voisin), l'inclusion (incluant, inclus), la mesure (égal, inégal). On remarquera comment tous trois jaillisent du trait-point(s), étiré, revenant sur lui-même, croisant ou jouxtant ses semblables. Bifurquant, incluant-excluant, mais aussi s'appliquant, mapping. Le mapping, que l'anglais emploie plus sobrement au lieu d'"application" (plicare, ad), et dont la mesure est une des modalités, est le mode fondamental de la représentation, ou présentation de quelque chose sous une autre forme (praesentare, re), selon l'opération fondamentale de tout système nerveux et de tout cerveau, opération qui, chez Homo, se complète des possibilités de son corps latéralisant et indexateur. Une fonction, nerveuse ou mathématique, n'est souvent autre chose qu'un "a one-to-one continuous mapping" (Webster's).

2. Analogie et digitalité du trait-point(s)

Le trait-point(s) a l'intérêt pour Homo de conjuguer le plus étroitement l'analogie et la digitalité. Il analogise quand il engendre des mimes de presque toutes les situations concrètes, des images, mais aussi des "bonnes formes" : rectangle, cercle, sinusoïde, courbes de Gauss, courbes en S, etc. Inversement, il digitalise, ou macrodigitalise, c'est-à-dire réalise des désignations par exclusions dans des panoplies et protocoles fermés quand il tranche et suscite les couples haut/bas, droite/gauche, ouvert/fermé, proche/lointain ; mesure, additionne/soustrait, et donc aussi multiplie/divise ; distribue par application les ordinalités autant que la cardinalité ; définit des points plus et moins voisins ; resegmentarise des ensembles en en mettant des portions entre des parenthèses ou devant des accolades. Etc.

L'activité digitalisante du trait-point(s) est même si spontanée que c'est lui qui a fourni les métaphores du situs et de la situation : faire le point ; et de l'opposition, comme quand on parle de traits oppositifs en phonématique et en sémantique.

La géométrie analytique, où la ligne-trait et sa position dans un référentiel deviennent $y = ax + b$, fut un tel moment décisif de l'évolution d'Homo parce qu'elle lui fit saisir dans une intuition quasi instantanée que l'analogie et la (macro)digitalité du trait-point(s) non seulement se conjuguent mais se donnent réciproquement à voir et à comprendre.

3. Charge et décharge (pureté) du trait-point(s)

Le trait point(s) est la rigidité, l'inflexibilité mêmes. Et pour en saisir toute la force à cet égard, il faut invoquer en dernier ressort la lumière. Propagée en ligne droite, du moins dans les conditions de gravitation modérée de la Terre, elle permet à l'oeil d'Homo, globalisant et focalisateur, de décider si un donné est courbe ou rectiligne selon que certaines parties y font écran à d'autres, qu'il s'agisse d'un bâton, d'un chemin ou de la surface d'un mur. C'est elle aussi qui, créant des ombres, suscite les lignes strictes des contours, et définit le point pur, quand deux ombres se croisent.

Cependant, malgré sa rigidité exemplaire, le trait conserve toujours un dynamisme interne. Même déchargé, même écrit, il continue d'être tiré-tendu, de donner à sentir l'action-passion de tirer-tendre, comme l'indique son ancêtre latin "tractus-us", qui est un substantif verbal, et non un substantif de chose ou d'état. C'est pourquoi le trait rigide est si apte à exprimer des mouvements décidés, parmi lesquels l'application, l'implication, la translation ; et à suggérer des mouvances, ces mouvements particuliers qui trahissent les forces dont ils procèdent, comme dans le cas d'un vecteur (vector, celui qui traîne, transporte). Aussi, les extrémités du trait sont des limites dans les deux sens du terme : des points qui marquent un seuil (limes,itis), mais aussi des points qui attirent, des pôles qui déterminent un "tendre vers".

Le dynamisme du trait chargé et déchargé résulte d'abord de la stature hominienne : (a) le bras (bracchium) qui braque (bracchiare) ; (b) le doigt index qui pointe ; (c) le regard qui darde ; (d) le corps dressé sur le sol qui pique et se fiche, comme un épieu ; (e) les deux mains planes symétriques qui tranchent et clivent les choses ou les délimitent en faisant courir sur elles les traits-point(e)s de leurs doigts tendus ou déployés. Ou qui s'appliquent l'une sur l'autre selon des fonctions diverses. Ou encore qui créent entre elles des symétries, des résonances, des effets de miroir, des miroitements.

Mais ce corps traceur et pointeur n'aurait rien pu sans un cerveau mammalien apte à l'utiliser. Dès l'animalité antérieure, le pointage, la ligne et surtout la droite, ligne dirigeante et dirigée (regere, dis, duo, conduire en faisant bi-furquer) ont une importance vitale dans la fuite, l'atteinte de la proie, du partenaire sexuel, du congénère, du nid, ou tout simplement parce que c'est le référentiel le plus économique dans un environnement. Ainsi, dans les premières aires de réception visuelle, le système nerveux des Mammifères commence par faire ce qu'il fait partout : renforcer ce qui saille quelque peu et estomper le reste, mais aussi privilégier les droites verticales et horizontales comme référentiel de gravité (Orban, Neuronal Opération in the Visual Cortex, Springer, 1984). A quoi aident encore souvent des exaltateurs cérébraux, neuromédiateurs chargés de soutenir des comportements importants et difficiles, comme la course du guépard derrière l'antilope.

Tout cela fait que le trait-point(s) est ce qui se stocke le mieux en mémoire, et donc se retravaille le plus commodément. Avec des conséquences importantes pour les élaborations mathématiques exotropiques, mais aussi endotropiques (conceptuelles) d'Homo. Et, dès ici, on pressent les accointances de la mathématique avec l'écriture, autre exploitation du trait-point ("Schrift, Bis auf Punkt und Strich vollendet", Goethe), et inversement de l'écriture avec la mathématisation virtuelle de tout environnement techno-sémiotique, traçant et pointant.

4. Le trait-point et le couple langagier *TIK/*PAL (un-deux)

Ruhlen et Bengtson, linguistes monogénistes de Stanford, estiment avoir repéré dans une douzaine de familles langagières dispersées sur le Planète une racine *TIK, qui exprimerait et mettrait donc en compénétration : indiquer, index, medius, doigt, main, un, seulement. Et, dans une autre douzaine de familles également dispersées, une racine *PAL, qui exprimerait et mettrait donc en compénétration : casser en deux, deux, demi, tous les deux, jumeau.

Ce genre d'affirmation appelle des nuances, comme tout ce qui concerne la notion de famille de langues. Mais elle vaut la peine d'être signalée ici. Car, si elle se vérifiait serait-ce quelque peu, - ce qu'on peut attendre de la simplicité et de l'éloquence phonosémiques des oppositions I/A, T>>K / P>>L, - elle jetterait une vive lumière sur le caractère originel, dans l'anthropogénie de la mathématique, du trait-point en tant que direction, pointement et section. A partir des concepts rapprochés par *TIK isolé. Et par *PAL isolé. Mais aussi par *TIK/*PAL comme couple techno-sémiotique (mental) à la fois tendu et complémentaire.

B. LA PURIFICATION (DECHARGE) DU TRAIT-POINT

On mesure alors les aisances et les difficultés de la mathématique. Elle profite de l'élan perceptivo-moteur et pulsionnel d'Homo lorsqu'il s'agit du trait et particulièrement du trait droit, de la droite, comme l'illustrent dès les images du paléolithique supérieur les "bonnes formes" du triangle de la vulve verticalement fendue et de l'angle aigu du pénis érigé, tous deux aussitôt enrichis, chargé, semble-t-il, de significations cosmologiques. Comme également des points (pointes) de dards, qu'on trouve un peu partout frappés près des animaux des grottes.

En même temps, pour que les index soient purs, c'est-à-dire déchargés de leur charge, il faut refroidir les ardeurs des traits-point(s), n'en garder que les aspects d'indexations comme telles. Pour quoi il y a deux recours. (1) Profiter, dès le niveau sensoriel, du fait que ce sont de "bonnes formes" et qu'ils donnent lieu à de "bonnes formes" (triangle, rectangle, cercle), c'est-à-dire à des formes résistant aux attractions de leur environnement perceptif. (2) Profiter, dans les élaborations cérébrales ultérieures, de la neutralisation sensorielle (conceptualisation) dont sont capables les aires cérébrales hominiennes dites associatives, et qui réussissent particulièrement bien leur travail sur des signes vides.

Cette purification fut lente dans l'anthropogénie. La ligne d'échine des images du paléolithique supérieur est déjà une ébauche du trait courbe ou droit, mais encore toute vibrante des muscles qui la poussent. Le cadre du néolithique est un rectangle, mais qui se gonfle des parturitions auxquelles donne lieu son schématisme générateur. Le sous-cadrage des empires primaires est exact, mais il se tranche en Egypte ou s'écrase au Mexique des flux d'autorités et de justifications qu'il relaie.

En fait, il fallut attendre que le continu-distant du MONDE 2 succède au continu-proche du MONDE 1 pour que les index purs se prennent comme thèmes dans leur pureté. Moment où le regard dans la "juste" distance du "tHeatron", donc du ni-trop-proche-ni-trop-lointain, permit aux Pythagoriciens, sur le trait de la corde d'une cithare, de poser les points de pincement et donc aussi les lignes d'intervalle correspondant aux proportions internes (harmonie) des écarts sonores. Moment où s'introduisit la première écriture transparente, non plasticienne, car la mise en place de la mathématique développée eût été impossible dans les insistances plasticiennes de l'écriture égyptienne et chinoise ou dans le bricolage de l'écriture contractuelle phénicienne. Moment de triomphe du logicisme exarcerbé de la langue grecque, avec ses deux conjonctions purificatrices : un "hè" réduplicatif, qui voulait dire "en tant que" ; un "gué" précisif, qui voulait dire "pris en rigueur".

Alors, il y a 2,3 mA, le trait en tant que trait et le point en tant que point, voire l'indexation en tant qu'indexation, purent donner libre cours à leurs applications et fonctions rigoureuses chez Euclide et Archimède. Par quoi Homo transforma localement et transitoirement le Réel en Réalité, c'est-à-dire en une part du Réel apprivoisée dans ses signes.

Enfin, quand les continus proche et distant des MONDES 1 et 2 cédèrent la place au discontinu (aux sauts de point de vue) du MONDE 3, le trait-point(s) se neutralisa, se purifia tellement qu'il donna lieu à des espaces possibilisés qui ébranlèrent pour Homo le confort de sa Réalité par l'intrusion d'un Réel. Montrant ainsi que la purification mathématique était moins affaire d'ablation que de construction, comme cela se confirmera plus loin.

C. L'EQUIPOLLENCE DES INDEX ET DES INDEXATIONS PURS

Ce qui fait la nature et la force de la mathématique c'est, en même temps que la radicalité perceptive et pulsionnelle des traits-points et leur disponibilité à la purification, la proximité qu'ils entretiennent avec les indexations auxquelles ils correspondent, c'est-à-dire avec les circulations cérébrales exotropiques et endotropiques qui s'y réalisent.

En effet, contrairement aux inadéquations qui existent entre thématisant et thématisé dans les indices et dans les signes pleins du langage et des images, et dans les index impurs du geste technique et du pouvoir, on ne trouve dans les thématisations qu'opèrent les index purifiés de la mathématique que trois choses : (a) des indexations pures, comme fonctionnement cérébral exotropique et endotropique, (b) des index gestuels et parlés, endotropiques et exotropiques, où ces fonctionnements s'extériorisent, (c) des index écrits où s'inscrivent et s'appuient les index gestuels et parlés sous forme de traits-points écrits. Or, la première et la troisième de ces trois couches se recouvrent là opératoirement et intentionnellement, même si elles ne sont pas équivalentes matériellement. On peut les dire équipollentes (pollere, aequum, avoir puissance égale). Grâce à cette équipollence, l'écriture mathématique exprime la mathématique même, alors que les écritures langagières ou idéographiques renvoient toujours largement à quelque chose d'autre que leur visée, et cela même quand elles sont autarciques comme l'écriture chinoise.

Demeure pourtant un décalage subtil. Car, quand il écrit des traits-point(s) en forme de triangle, ce n'est pas d'eux qu'Homo mathématicien dit qu'ils sont un triangle et que les trois angles de ce triangle sont égaux à deux angles droits, puisque les traits graphiques tremblent et bavent, avec tous les aléas de phénomènes physiques. Il est donc vrai qu'en rigueur la mathématique travaille non sur les index comme tels mais sur les indexations neutralisées (pures) qu'ils incorporent et qui seules fournissent les vraies formes, dont le triangle écrit au tableau n'est qu'une figure : "formae figura", distinguait déjà Lucrèce.

Cependant, pour finir, dans le triangle équilatéral dessiné, le cerveau mathématicien, qui manie la figure, ne manie pas les bavures de la craie, ni les différences des angles et des côtés, il manie des traits et des points opératoirement et intentionnellement "purs". Et cela en raison de ses complicités signalées plus haut avec le trait-point(s) comme tel. Un médiéval eût dit que, dans l'exercice de la mathématique, Homo manie les index (physiquement impurs) sous les espèces de l'indexation (pure). Cette implication de la forme dans la figure invita, du reste, à rendre cette dernière la moins impure possible, qu'il s'agisse des angles des rectangles des cadres au sol et au mur de Catal Hüyük, ou des "bonnes formes" du bord d'un jeton de comptage qui indiquaient les nombres des objets comptés à la même époque. Si bien que l'effort de rectitude du néolithique dans ces deux cas marque un premier début d'Homo mathématicien.

Pareille tension entre index et indexation a fait deux virtualités complémentaires qui sont la mathématique elle-même. Les indexations pures et encore endotropiques, presque strictement cérébrales, ont une souplesse, une vastitude, une rectitude, une ponctualité, que seuls permettent les circuits cérébraux associatifs et neutralisants, conceptualisants. Et c'est ce qu'on vise quand on parle de concepts mathématiques, en soulignant que jamais une figure écrite ou dite ou gesticulée n'aura les propriétés d'un concept.

Mais en même temps, les index-traits-points concrets, là sous les yeux, ont le mérite d'être transversalisés et transponibles pour Homo transversalisant et substitutif. Et comme en ce cas c'est bien de substituabilité, de transponibilité, d'application, de fonction, de proximité et non-proximité topologique, et parfois d'égalité et inégalité géométriques et algébriques qu'il s'agit, l'index manié exotropiquement a des vertus que l'indexation endotropique n'a pas. Cela est si vrai que, pour raisonner richement sur le cube, Homo mathématicien n'a guère trouvé mieux que de réduire ses trois dimensions, fuyantes, aux deux dimensions de la surface d'un support sur laquelle les traits-points se possibilisent à souhait. Pour l'efficacité, l'écriture mathématique est parfois presque la mathématique même. On en donne comme exemple classique les retards pris un moment par le calcul infinitésimal anglais en raison de sa fidélité à la notation de Newton, moins saillante et prégnante que celle de Leibniz pratiquée ailleurs. Que serait devenue la théorie des nombres si elle avait travaillé avec les chiffres romains plutôt qu'avec les chiffres indiens qui nous ont été transmis par les Arabes, et pour autant portent leur nom?

En sorte qu'il faut distinguer deux imaginaires mathématiques, c'est-à-dire deux saisies cérébrales endotropiques d'indexations pures: l'un de vision, l'autre de calcul. (a) L'imaginaire de vision est bien illustré par la géométrie euclidienne, la géométrie analytique de Descartes et projective de Desargues, où les traits maniés sont encore assez proches de l'espace perceptivo-moteur tridimensionnel pour que le mathématicien voie ce qu'il graphie, et aussi ce qui s'y meut. Descartes croyait que, moyennant quelque entraînement, un spécimen hominien pouvait arriver à une sorte de vision mathématique divine, à son sens simultanée, sans appel à la mémoire, source d'erreur. (b) Par contre, la géométrie de Riemann, qui part du postulat qu'on ne peut mener aucune parallèle à une droite, illustre un second cas, où l'espace perceptivo-moteur tridimensionnel macroscopique, seul maniable exotropiquement et même endotropiquement par le cerveau d'Homo, est déjoué. On pourrait parler là d'un imaginaire de calcul, voire d'écriture, de scription.

Il serait faux de croire que ce second imaginaire ne voit ni ne saisit pas du tout ce qu'il manie. Plutôt, il le saisit et même souvent l'anticipe, mais à l'occasion et dans le soutien du calcul, gestuel, parlé et surtout écrit. Cette fois les index des traits-points purs ne se contentent pas de porter et faciliter l'indexation, ni d'en faire voir des implications visibles. Par leurs mouvements indexateurs, ils la conduisent là où elle ne serait pas allée sinon, là où elle ne peut savoir qu'elle va que dans la mesure où ils l'émettent et la contrôlent. Certains textes de Riemann et certains regards de Poincaré donnent à sentir cette sorte de franchissements non-présentiels émis et soutenus par des fonctionnements présentiels. Et dans tout ceci on précisera, avec Bouligand, que la 4e dimension (et donc aussi l'espace-temps quadridimensionnel) a un statut à part, un privilège, en ce qu'il en existe encore des représentations combinatoires, préhensibles au moins successivement. Sorte de sas apprivoisant entre le visible et le seulement calculable ou écrivable.

D. LES EQUIVALENCES DES INDEX PURS

Vu ce qui précède, un système mathématique tient en une suite d'équivalences d'indexations et d'index purs à d'autres, sans que jamais une proposition équivale à sa contradictoire ; en d'autres mots, sans que "p", qui est une proposition dans le système, puisse être équivalent à "non-p" ; c'est ce qu'on appelle d'ordinaire la cohérence d'un système.

1. La monstration des équivalences

Dans les cas simples, les équivalences écrites ainsi que les définitions, axiomes et postulats implicites qu'elles présupposent sautent aux yeux pour la vision primatale d'Homo, à la fois focalisante et globalisante, et dont les productions perceptives sont encore abstraites (neutralisées sensoriellement) dans les aires d'association. Quelques constructions adventices sont parfois nécessaires, mais la simple monstration de la figure ou de l'équation redisposée suffisent à l'évidence (videre, ex) et à l'intuition (tueri, in). Le rôle de la mémoire dans le parcours est insensible. Hugo Steinhaus a fait un recueil suggestif de ces cas dans Mathematical Snapshots (Oxford, 1960), Mathématiques en instantanés (Flammarion, 1964).

2. La démonstration des équivalences

Mais il arrive souvent que la suite des équivalences et des appartenances soit trop longue pour être embrassée d'un coup d'oeil. Et Homo mathématicien s'habitua progressivement à la démonstration (monstrare, de), c'est-à-dire à une situation où la monstration suppose un départ (latin "de"), qui est parfois lointain. Le problème est alors celui de la mémoire, de ses aléas, de sa non-évidence. Descartes, voulant éviter ces périls, et surtout désireux de simultanéité classique (règle des trois unités de la tragédie, qui lui était contemporaine), rêvait de démonstrations si bien disposées et d'un démonstrateur si éveillé que la suite "a = b, b = c, c = d" donne l'évidence instantanée de "a = d", et ainsi de suite : "a = e = f...". Cet objectif avait un sens dans sa pratique, qui était une mathématique des proportions, si imbricables que leur saisie confortait l'assurance d'un Moi majusculé comme substance pensante (deuxième mémoire bergsonienne).

Cependant, cette prétention devint intenable lorsque l'analyse infinitésimale ne permit plus cet embrassement instantané. La démonstration supposa alors de plus en plus souvent l'appel à une mémoire de stockage (première mémoire bergsonienne), dont seules faisaient foi les continuités vérifiables de l'écriture. Et il se mit en place une rhétorique de la démonstration mathématique, consistant à éviter deux excès, puisque trop peu de détails créaient des failles de démonstration, et que trop de détails faisaient perdre le fil.

L'écriture mathématique cessa de se percevoir comme seulement l'expression (premere, ex, presser dehors) et le dépôt d'une pensée-geste-parole mathématique, censée l'essentiel, pour devenir elle-même le foyer de l'action-passion mathématisante, avec ses logiques et ses spontanéités. Et le problème de la mémoire mathématicienne ne fut plus métaphysique, comme chez Descartes, mais devint physique, ou mécanique. Peirce crut même que la mathématique était l'art de la démonstration.

3. La formalisation des équivalences

La prédominance du calcul écrit conduisit Homo à des monstrations et démonstrations dont tous les termes et opérations seraient, sinon mécaniques, du moins mécanisables. Assurément, ceci supposait que, dans les indexations, toute trace d'approximation et d'indicialité ait disparu. C'est ce que visa d'obtenir Leibniz. Le mot "formalisation", hérité de la métaphysique médiévale, a souvent désigné douteusement cette démarche, où il était question moins de "forme" et de "formation" que d'automaticité. Leibniz rêvait d'une machine à tirer des conséquences, et même toutes les conséquences, ce qui supposait que un Univers où tout événement ait une "raison suffisante". L'anthropogénie notera que comme souvent la pratique mathématique concordait ici avec une métaphysique : étant l'ensemble des meilleurs compossibles, le monde leibnizien, appelait un calcul indépendant d'un calculateur, jusque dans la pensée divine.

4. La radicalisation de l'évidence

La formalisation eut une première conséquence. En réduisant le travail mathématique à des éléments et à des opérations mécaniquement calculables, elle mettait à nu que le calcul, censé évident, avait des présupposés qu'il fallait expliciter pour que la mécanicité réussisse. Les évidences premières n'étaient pas toujours si premières, comme il apparut aussitôt à Leibniz, grand formalisateur.

Par exemple, la géométrie, cette métrie de la terre (guê metria), mit à jour qu'elle reposait sur une théorie générale du topos, du lieu, voire du site, où régnaient les notions beaucoup plus fluides de points voisins, de chemin, de noeuds et de tores, et aussi de plis, de fronces, de papillon, d'ombilics, où la mesure étalonnable n'intervenait pas. De la sorte, elle se situa comme un cas particulier d'une topologie générale et différentielle, celui où règnaient des transportabilités fixes, et donc aussi des étalons de mesure. Des radicalisations semblables se retrouvèrent dans d'autres champs de la mathématique, comme la théorie du nombre.

5. L'axiomatisation des systèmes

En même temps, la formalisation donna à voir, par l'aisance de ses transponibilités d'écriture, que la suite des équivalences dans un système pouvait parfois y être partiellement inversée sans qu'aucune proposition y soit perdue. Autrement dit, étant donné des propositions initiales non démontrées et des propositions déduites, on pouvait parfois prendre certaines de ces dernières comme initiales, et retrouver les premières comme déduites. Cette circularité systémique fut sans doute suspectée chez Leibniz, esprit combinatoire, mais ne fut fermement dégagée qu'autour des années 1900.

Ceci entraîna un bouleversement majeur, qui fut pour beaucoup dans le passage au MONDE 3. Car il ne faut pas s'y tromper. Tous les géomètres et mathématiciens durant tout le MONDE 2 avaient été convaincus que leur système partaient d'axiomes (axiomata, propositions jugées valables), lesquels selon l'étymologie impliquaient trois choses : l'évidence psychologique, la primauté logique, la non démontrabilité de fait ou de droit. C'est ce qu'illustre encore Leibniz quand il réclame qu'un axiome jugé premier soit remonté autant que possible vers un axiome plus premier, voire le plus premier. Cette régression finie de l'évidence concordait avec la définition classique de la vérité censée être une "adéquation entre l'intelligence et la chose" (adaequatio rei et intellectus).

Or, la circularité (partielle) des propositions initiales et des propositions dérivées, favorisée par la formalisation, entraîna la redéfinition de l'axiome comme une proposition choisie initiale, non en fonction d'une évidence ou intuition "objectives", ou d'un statut ontologique ou épistémologique de primarité, mais en raison des avantages systémiques qui découlait de sa formulation et de son élection à cette place : clarté et bon ordre des thèorèmes, fécondité du système, c'est-à-dire densité et ouverture de l'ensemble de ses propositions. Moyennant cette redéfinition de l'axiome (proposition choisie initiales), et donc aussi du théorème (proposition choisie dérivée), la circularité systémique put s'énoncer commodément comme la permutabilité (relative) des axiomes et des théorèmes dans un champ mathématique donné.

Du même coup, au lieu de vérité, on attendit d'un système la cohérence ou consistance, c'est-à-dire que la proposition "p" et sa contradictoire "non-p" ne s'y retrouvent jamais équivalentes. Et cela non parce que la non-cohérence aurait heurté une quelconque Raison, ou Logos, - ce qui aurait renvoyé à l'ontologie-épistémologie du MONDE 2, - mais pragmatiquement parce qu'elle aurait permis dans un système de démontrer n'importe quoi, ce qui l'aurait rendu stérile (Peirce).

En discréditant l'intuition immédiate, le remplacement de la vérité par la cohérence (consistance) renforça l'imaginaire de calcul, ou d'écriture. Car, autant l'intuition (cartésienne) est immédiate, autant le critère de cohérence s'étale dans le temps. Prendre pour proposition initiale que dans un plan par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une infinité de parallèles (Lobatchevski) ou aucune (Riemann), et postuler la cohérence des géométries ainsi engendrées, c'est-à-dire affirmer qu'elles ne mènent jamais à la contradiction, est une tâche redoutable. Poincaré l'abrégea quand il fit observer que, moyennant un dictionnaire approprié, les trois géométries euclidienne, lobatchevskienne, riemannienne étaient des traductions (automatisables) les unes des autres ; et que donc supposer la cohérence de l'une, l'euclidienne, c'était supposer celle des deux autres. Mais ceci était bien calcul, ou écriture, non intuition.

Toutes les branches de la mathématique multiplièrent ces prévalences de l'écriture. Ainsi, dans la théorie des nombres, ces nombres "transfinis" de Cantor, par exemple le dénombrable obtenu comme la classe des ensembles pouvant être mis en bijection (one one) avec l'ensemble des entiers.

6. Axiome et postulat

Il sera éclairant, pour l'anthropogénie de la mathématique, et en particulier pour son passage du MONDE 2 au MONDE 3, de s'arrêter aux avatars, durant plus des deux derniers millénaires, de ce qu'on appelle aujourd'hui le "5e postulat d'Euclide", et dont la formule familière est : "Dans un plan, par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle, et seulement une".

Nos éditions actuelles, appuyées sur un manuscrit du Vatican, distinguent dans les Eléments euclidiens : (1) des horoï (définitions), comme celles du point, de la ligne, du cercle, etc. ; (2) des koïnaï ennoïaï (notions communes), par exemple "deux choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles" ; (3) des aitèmata (demandes, postulats), introduit par "êtêstHô" (qu'il soit demandé) et dont les "trois premiers" sont : (a) la disponibilité de tracer une droite entre deux point, (b) la disponibilité de prolonger une droite indéfiniment dans sa direction, (c) la disponibilité, à partir d'un point quelconque, de tracer un cercle dont il soit le centre. Toujours sous le même "ètèstHô" (qu'il soit demandé) nos éditions proposent alors un "postulat cinquième": "Et si une droite coupe deux droites et détermine avec elles des angles intérieurs inférieurs à deux droits, ces deux droites quand on les prolonge à l'infini se rencontrent quelque part du côté où les angles sont inférieurs à deux droits".

Or, ceci intéresse multiplement l'anthropogénie. D'abord, elle voit assez là la multiplicité des formulations. Nous partons aujourd'hui d'un point pris hors d'une droite, ce qui permet d'opposer clairement les partis d'Euclide, Lobatschevski et Riemann. Euclide, qui n'a pas la moindre suspicion de ces derniers, et qui d'autre part est un Grec épris d'angles droits part de deux angles égaux ou inégaux à deux droits. Autour de 1650, Wallis, arithméticien des infinis, suivi en cela par Laplace et Carnot, exprime le "cinquième postulat" comme la disponibilité de construire à n'importe quelle échelle donnée une figure semblable à une échelle donnée.

Mais, de façon plus éclairante encore, Proclus, qui au Ve siècle de notre ère travaille certainement sur d'autres manuscrits que nous, n'admet que trois postulats, ceux que nous venons d'énoncer à l'instant, et classe donc notre postulat (cinquième) dans les "koïnaï ennoïaï" (vérités communes). C'est sans doute qu'il comprend les postulats comme de simples autorisations de construction, en l'occcurence l'autorisation d'utiliser la règle et le compas ; Lachelier concordera avec lui sur point. Et qu'alors notre "cinquième postulat" lui paraît d'un autre ordre

: quelque chose qui touche une propriété du monde-cosmos ancien, et qui rentre donc dans ce que les classiques appelaient un axiome (vérité évidente, première, indémontrable ou indémontrée). C'est ce que pensait certainement Wallis, qui crut l'avoir démontré, et encore ces membres de l'Académie des sciences qui, jusqu'au début du XXe siècle, en examinèrent les démonstrations. C'est également ce que pensait Peyrard dans sa première traduction de 1809, où notre "cinquième postulat" apparaît comme un "onzième axiome". En tout cas, il fallut les géométries de Lobatschevski et de Riemann et le concept d'axiome au sens récent pour que le notion de postulat soit redéfinie aussi, et que ce qui avait été ou bien un "onzième axiome" ou bien un "cinquième postulat" soit classé, jusqu'à nouvel ordre, comme un postulat dans le sens nouveau.

L'anthropogénie remarquera donc à quel point un texte mathématique n'est pas un texte comme les autres. Quelqu'un qui copie ou commente une tragédie ou un texte sacré cherche d'ordinaire à s'en tenir aussi exactement que possible au texte d'origine, avec ses mots et leur ordre. Or, justement parce qu'ils proposent essentiellement des index et des indexations, signes vides, les textes mathématiques antérieurs à l'imprimerie furent en perpétuelle mutation, sinon de termes, du moins d'ordre, selon les champs mathématique du moment. Enseigner vraiment la mathématique c'est sans cesse et fatalement la refaire. Comme autrefois recopier la musique, autre champ dominé par les index, c'était souvent aussi la recomposer.

Saurons-nous jamais ce qu'Euclide lui-même en pensait? En découvrant de nouveaux manuscrits, penserait-on naïvement? Même pas, car, à moins que ces manuscrits soient autographes, ils auraient déjà toutes les chances d'être des relectures et des reconstructions. La seule approximation viendrait d'une vue aussi profonde que possible du destin-parti d'existence d'Euclide, c'est-à-dire de la topologie, de la cybernétique, de la logico-sémiotique, de la présentivité activées-passivées par les Grecs de son époque. Ce qui conduirait à voir qu'il n'emploie pas "axiomata" mais "koïnaï ennoïaï", que ses "erèmata" semblent bien postuler de simples autorisations de construction, celles de la règles et du compas, que le "cinquième postulat" ne semble pas être une simple règle de construction, etc.

7. La mathématique comme construction d'espaces

Dans le cadre de l'axiomatisation, la valeur d'un système mathématique se mesure alors à sa fécondité, c'est-à-dire au nombre, à l'embrassement, à l'imprévu des équivalences qu'il supporte et coordonne, et surtout à sa capacité de construire de nouveaux espaces. Les axiomes au sens récent ont fait voir qu'il n'y avait pas un espace mathématique absolu préalable, qu'Homo aurait alors à découvrir, selon la vérité grecque conçue comme dévoilement, a-lètheïa, ainsi que le suggérait les axiomes au sens anciens. Mais bien plutôt que l'espace mathématique est, au fur et à mesure de l'anthropogénie, l'ensemble coordonné de toutes les indexations pures possibles introduites par Homo dans l'Univers. En d'autres mots, les index axiomatisés ne décrivent pas l'espace, ni les espaces, ils les suscitent en les indexant de traits-points. Ou, plus naïvement, en voyant comment des traits-points peuvent être ressaisis, assumés, subsumés par des traits-points plus généraux.

En son glissement de la vérité à la cohérence, l'axiomatisation, a conféré aux systèmes mathématiques une autarcie. Il importe pourtant de voir que cette dernière est relative. De même que la formalisation peut formaliser les traits-points tracés mais pas leur tracement, de même l'axiomatisation ne peut axiomatiser la postulation et la pulsion systématique d'Homo, qui lui fournissent son mouvement et son principe. Pour finir, toute mathématique, comme toute production hominienne, dépend de phénomènes physiques, en l'occurence d'une stature, d'une vision, d'aires associatives cérébrales, de pulsion à l'exploration (allostasie), dans des corps particuliers. Mais ceci paraîtra mieux maintenant à propos des occasions de l'invention mathématique.

E. L'INVENTION MATHEMATIQUE

L'invention mathématique tient en l'introduction d'une relation mathématique, parfois dite concept mathématique. Par exemple : la situation d'un point ou d'une ligne selon des axes ayant une origine ; la tendance vers une limite ; l'intégration et la dérivation ; le voisinage au sens topologique ; les notions d'ensembles d'éléments et d'applications d'ensembles les uns sur les autres ; les rapports entre fonction et application ; la notion de catégorie ; la définition de la droite dans une géométrie différentielle synthétique, etc.

L'anthropogénie a au moins deux motifs de s'intéresser à l'invention mathématique. La pureté des éléments en jeu y met à nu les stades de toute invention hominienne en général ; Valéry, qui s'intéressait à la fabrication (poïèsis) du poème (poïèma), consacra une attention incessante aux démarches du mathématicien. En retour, ces stades de l'invention en général dévoilent ou précisent la nature de la mathématique. C'est sans doute pourquoi Poincaré a trouvé bon de raconter les circonstances de son invention des fonctions fuchsiennes.

1. Le déclenchement de l'invention

Le récit de Poincaré relève (a) comment le nouveau concept mathématique lui est apparu de façon fulgurante, et cela à l'instant où, prenant un autobus parisien, il mettait le pied sur le marchepied; (b) comment, ayant rejoint son siège, ce concept lui fit sentir aussitôt sa validité et sa fécondité ; (c) enfin comment, dans les jours et semaines qui suivirent, il n'eut plus qu'à mettre en place et à vérifier en rigueur les avenues et les extensions du champ mathématique ainsi créé.

Ce mélange de vitesse et de rigueur tient fondamentalement à la nature des éléments en question, qui sont des index purs et des indexations pures, les deux étant en équipollence. Ainsi, un déplacement, une neutralisation, une assimilation ou bifurcation peuvent avoir une vitesse de clarification et de propagation impossible ailleurs, même dans les conversions religieuses ou philosophiques foudroyantes, lesquelles mettent d'ordinaire longtemps à dévoiler leurs présupposés et implications d'indices et autres signes pleins. Il n'y a guère que la composition et la lecture musicales, elles aussi très indexantes, qui connaissent des éclairs semblables.

2. L'incubation de l'invention

Cependant, l'illumination mathématique suppose des incubations cérébrales permanentes. Dans le computer bioélectrochimique hybride (analogisant, digitalisant) qu'est le cerveau, où les constructions sont informationnelles et les informations constructrices, tout déséquilibre, toute donnée en recherche, tout chevauchement perturbateur, toute confusion, concernant même des trajets ou des aires cérébrales parfois très éloignés, crée une attente, le plus souvent non présentielle. Alors un jour un événement plus ou moins endotropique (une rencontre de calculs ou d'imaginations) ou exotropique (la pose du pied sur le marchepied de l'autobus) suffit à déclencher l'invention, c'est-à-dire un nouvel équilibre stable ou excité. Le cerveau du mathématicien créateur pourrait être décrit comme celui qui, dans le domaine des index et des indexations pures, est le siège de beaucoup d'attentes ou de déséquilibres à forte pente, et qui aussi ne laisserait pas passer inaperçues leurs rééquilibrations complètes, partielles, transitoires quand elles surviennent, les thématiserait, les presserait pour en tirer le maximum de conséquences.

La sensibilité aux effets de champ perceptivo-moteurs et logico-sémiotiques semble jouer là un rôle essentiel. Il est rare que des inventeurs mathématiques n'aient pas eu un intérêt très vif pour un art: musique, poésie, peinture, parfois les trois. Ils auraient alors en propre la faculté double d'activer puissamment les effets de champ et de les refroidir aussitôt et autant. Eilenberg, initiateur de la théorie des catégories, se proposa une année de consacrer son cours de Columbia à la peinture chinoise, sans doute le plus grand réservoir d'effets de champ.

3. Les appels à l'invention

Mais, à côté de ces dispositions internes, on notera quelques stimulations extérieures assez habituelles pour que l'anthropogénie en fasse un relevé sommaire.

a. Les problèmes techniques et physiques

Homo est d'abord technicien, et le mathématicien a presque toujours répondu, comme Homo en général, à des demandes plus ou moins urgentes de l'environnement technicisé par lui, le *woruld.

Les premières mesures de surface et de capacité naquirent de l'arpentage des champs et du stockage des blés et des huiles dans les empires primaires. Les Pythagoriciens considérèrent les problèmes d'accord des cithares grecques. Descartes, en un siècle de lunettes et de microscopes, calcula les diffractions de rayons lumineux au passage d'un milieu transparent à un autre. Desargues et sa géométrie projective la construction économique des bâtiments. Le calcul infinitésimal les trajectoires des boulets et des planètes sous l'effet de la gravitation. Le calcul des probabilités la théorie des erreurs dans les mesures physiques. La géométrie symplectique (plekeïn, syn, tisser ensemble, entrelacer) les formes des mouvements de corps soumis à des attracteurs multiples, comme les planètes à gravitations interagissantes. La géométrie fractale les phénomènes de cristallisation et de vascularisation. Etc.

b. Les disponibilités instrumentales

De même, de nouvelles machines de calcul, de traçage et de repérage, d'écriture et réécriture ont presque toujours proposé de nouvelles constellations des index purs qu'on y introduit ou qu'on en sort. Ainsi, la théorie du nombre chez Pascal et sa machine à calculer renvoient intrinsèquement l'une à l'autre. Aujourd'hui, les computers n'ont pas été pour rien dans la création de nouvelles branches du calcul numérique. Ou aussi dans la vérification de la non- prédictabilité à long terme de systèmes réputés stables, comme le système solaire. Ou encore dans des suggestions concernant les fractals.

c. Les malaises théoriques

Certains appels viennent de la mathématique elle-même. Ils sont de deux sortes. (a) Les uns tiennent à des obscurités inhérentes à l'objet mathématique, comme la quadrature du cercle ou le statut du "cinquième postulat" d'Euclide. En ce cas, l'attente peut être longue avant que ne surgisse, sinon la solution, du moins la clarification. Le "théorème" de Fermat a mis plus de trois siècles à se démontrer hier. (b) D'autres appels résultent de la non-communication entre deux parties du système global qu'est la mathématique. Ainsi de la non-communication entre champ de la géométrie et champ de l'algèbre, dans leur état du XVIIe siècle, qui conduisit à la géométrie analytique ; ou des non-reliements entre les géométries qui menèrent à la généralisation de la notion de géométrie par Klein. En ce cas, la résolution est souvent rapide, et Eilenberg aime à dire que l'idée de catégorie, et même sa dénomination, était si attendue au moment où lui et MacLane la formulèrent qu'elle était fatale, un peu plus tôt, un peu plus tard.

d. La connivence du mathématicien avec les sollicitations

Enfin, il faut remarquer les accointances de l'invention mathématicienne avec le fantasme ipséisant et le destin-parti d'existence du mathématicien comme organisme et système techno-sémiotique singuliers.

Euclide proposant son postulat-axiome dans une formulation typiquement grecque à partir de deux angles droits nous en a déjà prévenus. C'est dans le système nerveux vertigineux de Pascal qu'on trouve sans doute à la fois ses lancinantes interrogations sur le vertige, sa rhétorique des deux infinis, son idiolecte à retournements incessants et foudroyants, et la préfiguration, que lui reconnaît Leibniz, du calcul infinitésimal à travers ses travaux sur les coniques. Descartes parle sans cesse de son obsession d'une vision instantanée, se passant de mémoire, et requérant ainsi une algébrisation de la géométrie et une géométrisation de l'algèbre qui sont la géométrie analytique ; Baillet lui attribue une extrême acuité de la vision nocturne. La perception de leur corps semble avoir été intense chez certains topologistes : Poincaré fut très attentif aux 5 dimensions (3 de translations et 2 de rotations des mains jusqu'au poignet), et en signalait davantage en remontant jusqu'à l'épaule. René Thom a écrit un texte fondamental sur la danse comme "sémiurgie", où il souligne que les anatomistes comptent 200 degrés de libertés du corps hominien en son entier.

Du reste, c'est Poincaré qui remarquait que, devant un même objet et un même concept mathématiques, il y a une approche "géométrique" et une autre "algébrique". On peut croire que les "géomètres" de Poincaré analogisent aussi loin que possible, tandis que ses "algébristes" digitalisent aussi loin que possible, quitte à ce que les deux populations se chevauchent. Ces deux tempéraments sont sans doute à la base de l'aversion de certains, comme René Thom, pour des démonstrations qui leur semblent fastidieuses, alors que d'autres, outre la sécurité, en attendent de nouvelles généralisations, c'est-à-dire de nouvelles associations neutralisantes.

On peut alors écrire des enfances de mathématiciens. Thom s'y est exercé de façon suggestive dans un chapitre préface à son recueil d'articles intitué Apologie du Logos. Il y confie qu'ayant passé ses premières années à proximité d'une gare de trillage à Montbéliard, il y conçut l'intérêt pour le rail : pourquoi les deux tores du bi-rail plutôt que le tore unique du mono-rail? qu'était-ce que les aiguillages sinon des ombilics elliptiques très agissants? quelles combinaisons d'énergie et d'information, d'entropie et de néguentropie se jouaient dans les wagons d'abord montés sur un tertre et qui en redescendaient triés? Cela prépara un certain regard. Celui qui dans les singularités de la topologie différentielle reconnut les catastrophes élémentaires. Celui qui s'appliquant aux feuillets de l'embryologie se prit à les lire comme une suite de bifurcations obligées.

Mais tout ceci encore, notera l'anthropogénie, n'a lieu que parce que la mathématique est la théorie pure des indexations et des index. En fin de compte, l'invention comporte à la fois le moment de passion et de pulsion où les traits-points sont réactivés avec leur charge et leur effet de champ attenants ; et le moment où ces charges sont refroidies pour obtenir le statut d'index et d'indexations purs. La coexistence de ces deux moments, dont aucun ne réduit jamais l'autre entièrement, se vérifie dans le fait que tout est formalisable en mathématique sauf justement le mouvement traçant ou pointant : tend vers. Il existe une photo du corps, du visage, du regard de Poincaré qui donne à pressentir quelque chose de ce double mouvement.

F. LA MATHEMATISATION

La mathématique entretient deux rapports avec l'évolution d'Homo. D'abord, elle la suppose : point de mathématique sans la sélection des aires associatives et neutralisantes du cerveau, sans l'éclosion de la stature transversalisante et du geste autour des deux mains planes, sans la vision angularisante et processionnelle, sans l'ouïe proportionnante et échoïsante, sans l'image détaillée, sans des couples langagiers du type *TIK/*PAL, sans les écritures contractuelles puis transparentes.

En retour, la mathématique a vigoureusement fait avancer l'évolution d'Homo. En activant ses pouvoirs physiques, chimiques, biologiques. En étendant et animant par des idées régulatrices ses systèmes sémiotiques, en particulier ses tectures, ses images, sa littérature, sa musique. Mais aussi en fomentant chez lui des illusions exaltantes. Encore subliminales mais déjà très actives dans le cadrage et le schématisme générateur du néolithique. Actives et supraliminales dans le sous-cadrage spatio-temporel arpenteur des empires primaires. Franchement thématisées dans le pythagorisme proportionnant, qui introduit le MONDE 2 grec. Et jusque dans la crise des fondements axiomatiques autour de 1900.

Au vrai, il faut discerner dans l'anthropogénie un phénomène qu'on pourrait appeler la mathématisation, à la fois action, méthode, vertige, sentiment, illusion. Il sera bon de rassembler quelques facteurs de ses prestiges. Et aussi quelques domaines de ses dévoiements et impasses. Enfin, de ses illusions transcendantales.

1. Les prestiges de la mathématisation

Les prestiges de la mathématique, ou plutôt de la mathématisation, montent du trivial au sublime. Et redescendent du sublime au trivial.

(a) La mathématique avoisine le JEU. - En effet, ses index sont des signes vides, hors situation, qui se prêtent à la délimitation, sur une feuille blanche ou sur un tableau noir, et à l'irresponsabilité qu'on attribue au jeu.

(b) La mathématique est PRESTIDIGITATRICE. - Le mathématicien propose des axiomes d'abord opaques, dont sortent ensuite des effets surprenants et invincibles, en une digitation preste (la presti-digitation) qui rappelle que "digit" en anglais désigne à la fois les dix doigts de la main et les dix chiffres de 0 à 9.

(c) La mathématique se donne comme une SYNTAXE pure. - En effet, elle tient en une suite d'applications d'index sur index, lesquels ne sont pas des signes pleins. C'est par là qu'un système mathématique est une tecture (architecture) entraînant un genre étrange d'habitation, où l'habitant s'enferme non seulement contre le froid et la pluie, mais contre toute situation concrète en général. Demeure ou refuge à l'abri des morsures de la Réalité et du Réel, tout en n'étant ni un rien ni un vide, puisque les indexations, leur élan et leur purification sortent de la stature d'Homo, de sa vision, de son cerveau.

(d) La mathématique avoisine la MAGIE, c'est-à-dire qu'elle invite à passer de thématisations sémiotiques en distanciation à des effectuations techniques. - En raison de l'équipollence entre indexations et index, puis entre brandir un index et donner un ordre, les indexations et les index purs passent facilement d'une activation cérébrale hypothétique à une production sémiotique performative. Quitte à ce que le monde ainsi suscité ait peu ou pas de rapport avec le monde des événements concrets.

(e) La mathématique est une expérience d'AUTARCIE. - C'est que, tout à la fois, elle sait exactement de quoi elle parle (Borel), et ne sait pas du tout de quoi elle parle (Russell). En effet, ses index, étant des signes vides, en rigueur ne parlent de rien. Mais, étant en même temps des occasions d'applications et de fonctions montrables ou démontrables, ils forment une pratique où coïncident au moins idéalement le mot et le terme, le dialecte vivant et la langue fixée, le dialecte et l'écriture, le système et la structure. C'est même le seul cas où un système est entièrement engendré par sa structure, puisqu'il n'en va pas ainsi dans un organisme, ni dans un langage, ni dans une entreprise, ni dans une montagne. Il y a pour autant une parenté entre la mathématique et la folie, vu que le mathématicien est peu habitué aux résistances de la Réalité et du Réel, ou en tout cas peu enclin à se mouvoir dans leurs enchevêtrements, voire dans leurs contradictions, comme y oblige la vie ordinaire.

(f) La mathématique invite à l'idée d'A PRIORI. - Kant voulait que la géométrie et l'arithmétique de son temps fussent composées de jugements synthétiques a priori. Synthétiques, en ce qu'ils accroissent la connaissance, ce que ne fait pas un jugement analytique, où l'attribut est contenu dans le sujet. A priori, en ce que leur accroissement ne vient pas d'expériences physiques concrètes, lesquelles sont toujours en changement. En vérité, la mathématique n'est ni analytique ni synthétique au sens kantien. Ni non plus a priori ni a posteriori au sens kantien. Elle est une construction résultant de la purification et de l'absolutisation des index produits par le corps d'Homo. Ce qui lui donne un caractère expérimental : aventure qui avance et se contrôle par la cohérence pratique d'une écriture. Pourtant, dans ce cas, la résistance rencontrée par l'expérimentateur n'est aucunement celle des faits purifiés que rencontre le physicien, et moins encore celle des faits enchevêtrés que rencontre le politicien. D'où l'illusion entretenue d'apriorité.

(g) La mathématique a des prétentions d'ETERNITE. - Le mathématicien construit des indexations, et donc des espaces, voire des espaces-temps, qu'il déploie ; par quoi il est historique. Cependant, les index et les indexations qu'il a une fois posés et déployés restent directement accessibles à sa pratique, dans la mesure où ils sont des signes vides, et ne sont pas affectués par leur situs et leur situation; par quoi il est transhistorique après coup. Sauf erreur un jour constatable, les différents moments de la mathématique une fois posés demeurent de soi inchangés, même quand ils sont repris, généralisés dans des saisies de plus en plus larges ; ainsi de la géométrie d'Euclide qui fut réassumée dans la géométrie de Klein, s'appuyant sur la notion de groupe de tranformations. Moyennant ces restrictions, il y a un sens à dire que la mathématique est un transcendantal en construction, par opposition au transcendantal préalable kantien.

(h) La mathématique s'est souvent imposée comme ORIGINE. - Cela tient en partie à son indépendance des situations et des circonstances, et à un certain statut hors du temps. Mais sans doute aussi au caractère virtuel de ses propositions, relations d'indexations qu'on sent grosses d'autres relations d'indexations, grosses surtout de leur propre généralisation générative. Remontant jusqu'à la musique des sphères, chez les Pythagoriciens. Jusqu'à un ciel d'idées intelligibles, conçues comme "relations-proportions" chez Platon et Descartes. Jusqu'à un transcendantal, c'est-à-dire à un ensemble de conditions de possibilité de tout objet comme objet, chez Kant.

(i) La mathématique figure le sublime, et en particulier la TRANSCENDANCE et l'IMMANENCE majusculées. Elle fournit même, du coup, des métaphores intimidantes, gestuelles, parlées et surtout écrites, pour tout ce qui est indescriptible, comme la présence-absence, la subjectivité, le sujet, le fantasme, le Réel excédant la Réalité. Mathématiser le psychologique et l'événementiel fut souvent chez Homo un moyen de la simple intimidation ou de la franche paranoïa.

(j) La mathématique s'est étymologiquement désignée comme la matHematikè tekHnè ou epistèmè, la technique ou la science qui concerne l'apprentissage, c'est-à-dire la MATHESE, action et désir de s'instruire en général.

2. Les pentes et les limites de la mathématisation

Dans le dernier tiers du XXe siècle, Homo a commencé à se rendre compte que la mathématisation des choses (qu'on ne confondra pas avec les mathématiques) comportait un mélange inextricable d'efficacités et de détournements. En 1980, Cosmos de Carl Sagan popularisa les bizarries de Kepler et de Newton. En France, la revue La Recherche se plut à signaler les étranges motivations des scientifiques du passé et du présent, et exhiba dans son courrier les grossièretés de forme et de fond de certaines de leurs querelles. Aux Rencontres Internationales de Genève de 1983, René Thom rassembla une Boîte de Pandore des concepts flous :

Système, Ordre-Désordre, Simplicité-Complexité, Déterminisme-Hasard, Signal-Bruit, Information-Entropie, Catastrophe, Bifurcation, Fluctuations, Chaos, Turbulence, Niveaux d'organisation.

Ces exemples concernent les sciences de la nature : la physique, en particulier la thermodynamique ; la biologie, en particulier l'évolution. Par bonheur, dans les sciences de la nature, les divagations sont souvent vite dénoncées et corrigées, sauf justement dans la thermodynamique et les théories de l'évolution. Par contre, dans les sciences humaines, les tentations mathématisantes sont récurrentes, envahissantes, profondes.

En voici quelques domaines qui concernent de près l'anthropogénie. (a) L'éclairage des oeuvres d'art par la théorie de l'information, dont une des définitions comporte que la quantité d'information d'un système est l'inverse du logarithme de sa probabilité (on en a déduit que la force d'une oeuvre d'art se mesurerait à sa virtuosité combinatoire et à son imprévisibilité spatiale ou temporelle). (b) Les approches photométriques de la peinture, aussi floues de mesures que de présuppositions. (c) Les modèles mathématiques des systèmes de parenté. (d) Les noeuds et les mathèmes de la psychanalyse lacanienne (ruban de Möbius, bouteille de Klein, plan projectif, axiomes de logique formelle) censés éclairés les structures du "sujet" du langage. (e) L'application de la théorie des catastrophes à l'économie, malgré les mises en garde de René Thom. (f) L'économétrie et ses présupposés psychosociologiques latents d'un acheteur-vendeur optimalisant ses opérations. (g) L'intrusion des algèbres de Boole dans la logique du langage courant. (h) Les états loin de l'équilibre, voire le chaos, invoqués dans des raisonnements dont les définition de départ sont inconsistantes et les points d'arrivée éloignés de ce qu'on se propose d'expliquer (malgré des exemples invoqués un moment par des disciples de Prigogine, les flux organisés se formant dans un liquide bouillant par simple application d'énergie n'expliquent que suggestivement l'expérience de Miller, où des corps plus simples forment des acides aminés à partir d'une énergie électrique).

Assurément, cette énumération ne préjuge nullement de ce qui est vrai et faux, ni de ce qu'il faut faire ou ne pas faire. Elle veut seulement signaler à quel point la mathématisation est une pente d'Homo, en particulier d'Homo récent, et comment l'histoire hominienne est faite d'une alternance de mathématisations triomphales, comme en physique, et de retours, soit qu'on se soit avancé dans un domaine où la démarche est peu pertinente, soit qu'il faille la prendre autrement. Le fait que les formations aminoïdes (puis protéinoïdes), qui dominent l'édification du vivant, soient peu mathématisables à première vue situe déjà bien les enjeux quand il s'agit de la vie en général. Et le fait que les effets de champ perceptivo-moteurs et logico-sémiotiques, qui dominent l'art et l'expérience quotidienne, soient peu mathématisables situe bien les enjeux aussi quand il s'agit de la vie du vivant techno-sémiotique qu'est Homo.

3. Les illusions transcendantales guettant le mathématicien

Le mathématicien s'occupe des structures et de leurs transformations. Son cerveau avec son corps entier est mû par les cohérences des structures, leurs efficacités, leurs paradoxes, leurs relents de présence-absence, osons-le dire, leurs beautés.

Mais le terme "structure" n'est pas univoque, et comprend au moins trois sens : (a) L'opération de construire (struere, heap up, build, aneinanderfügen, schichten, zubereiten, ordnen), et cela naturellement (un océan, une montagne) ou artificiellement (un outil, une musique, une équation, un cercle). (b) Les résultats de cette opération. (c) Les lois ou les règles de cette opération.

Dans les panoplies et les protocoles naturels ou artificiels, le physicien et le biologiste tentent de voir s'il y a des constances de consécutions d'événements ; et ils en font des lois. Or, dans ces constances physico-biologiques, certaines concernent la disposition (ponere, dis, placer, en deux). On trouve ainsi des constances de la disposition comme configuration (voisin/non voisin, ouvert/fermé, englobant/englobé) et comme dimension (égalités de figures et de nombres). Les constances de disposition sont l'affaire du mathématicien, qui est alors tantôt topologistes, arithméticien, géométre classique, algébriste, etc. ; et on voit ainsi comment le physicien et le biologiste renvoient au mathématicien. Dans son travail sur les constances dans la disposition des événements, le mathématicien produit-il alors des lois ou des règles? Il a longtemps hésité, croyant que ses règles, à force d'engendre des constances, étaient des lois. *Aujourdh'ui, ayant axiomatisé son travail, il voit plus clairement qu'il produit des règles, lesquelles, au lieu de permettre de construire des objets, comme en technique, permettant de déduire des constances de dispositions cohérentes entre elles, c'est-à-dire ne faisant jamais que la disposition ne soit plus disposée.

La tentation d'illusion transcendantale du mathématicien tient sans doute à ce que les constances qu'il étudie ne sont pas celles des énergies, des masses, des vitesses qu'étudient le physicien et le biologiste, mais celles de la disposition comme disposition (configuration et dimension) de tout événement possible, et que de plus ces constances peuvent s'obtenir non seulement par abduction et induction. Son objet ce sont donc des structures au sens c (règles de construction), qui épuisent les structures au sens a (la construction comme opération de construire), qui épuisent les structures au sens b (le construit résultat), lesquelles en ce cas sont légères (figures et formules écrites) et du reste ne sont pertinentes que dans ce qu'elles permettent de viser (la droite ou le cercle définis par la règle pure de leur construction, la structure au sens c, seulement aidée par la vision de la droite ou du cercle écrits, la structure au sens b, à travers un travail d'écriture, la structure au sens a. La dernière pente vers l'illusion tenant à ce qu'il est facile de sublimer les "règles" constantes de disposition en des "concepts" de disposition.

Ainsi les règles de construction mathématicienne ont-elles pu former un monde d'idées éternelles transcendantes chez Platon. Elles ont procédé de formes a priori, selon des jugements synthétiques a priori, chez Kant, qui a sans doute confondu la constance absolu dans l'expérience avec a priori, c'est-à-dire un préalable à l'expérience. Elles ont pointé un "réel<=réalité> non fantasmatique" pour Lacan, du moins chaque fois qu'on y touche de "l'impossible", tels certains indécidables au sein de l'arithmétique selon Gödel. <<<<<< Elles proposent même un réel versus la réalité, et produisant une vérité s'opposant au fonctionnement, dans le vocabulaire de René Lavendhomme. >>>>>>

Le vocabulaire de l'anthropogénie oppose dans l'Univers les fonctionnements, descriptibles, et les présence(s)-absence(s), indescriptibles ; et il distingue la Réalité et le Réel, en ce que la première se tient dans les fonctionnements actuels ou virtuels descriptible de facto et de jure, tandis que le second comprend la présence-absence <5>, et donc échappe à la description de facto et de jure. A ce compte, chez le mathématicien, les opérations neuronales, les résultats d'écriture, les opérations d'écriture, les règles d'écriture appartiennent bien aux fonctionnements, descriptibles, quitte à ce que la présence-absence les accompagne, et soit même "intensifiée" quand ces fonctionnements deviennent des poursuites, des trouvailles, de insights, des doutes, des commutations très rassembleurs, très vertigineux. La mathématique est même l'occasion du fonctionnement le plus pur, le plus adéquatement descriptible, puisque les trois sens de "structure" s'y comprennent réciproquement et adéquatement. Comme ses règles de constances de la disposition ne sont pas des lois mais justement des règles, elles construisent des espaces qui tantôt s'appliquent aux événements physiques concrets tantôt ne s'y appliquent pas. Elles ne quitte pas pour autant la Réalité des systèmes neuronaux et des corps qui les produisent.

En tout cas, l'illusion transcendantale qui guette ou porte ou nourrit le mathématicien est un des ressorts importants de l'anthropogénie.

G. MOMENTS ET CIVILISATIONS MATHEMATIQUES

Ce qui a été vu des tectures, des images et des musiques hominiennes suffit suggérer l'essentiel de ce qu'impliqua dans les mathématiques le passage du continu proche du MONDE 1A, non scriptural, au continu proche du MONDE 1B, scriptural, marqué par les théories de l'arpentage de la Terre en Egypte et dans les autres empires primaires, et plus encore par l'arpentage des panoplies et des protocoles du Ciel dans l'astronomie de Sumer.

Le continu distant du MONDE 2 grec et occidental, avec sa vue selon la juste distance de la tHeôria, engendra la démonstration géométrique, c'est-à-dire à partir d'axiomes au sens euclidien et archimédien. Mais l'anthropogénie apercevra aussi combien cette révolution supposa le remplacement des écritures intenses des empires primaires par des écritures transparentes et bientôt disposées en codex, comme les écritures gréco-romaines.

On prendra comme départ du discontinu du MONDE 3, le relai de la vérité, adéquation entre l'intellect et la chose, par la cohérence (consistance), en particulier dans la convertibilité des axiomes et des théorèmes inaugurées par les axiomatiques autour de 1900.

Reste à signaler qu'anthropogéniquement les mathématiques ont été influencées par les destins-partis d'existences des grandes civilisations. A ce propos, vers 1920, le premier chapitre de Der Untergang des Abendlandens fut décisif ; Spengler y affirmait qu'Archimède n'avait pu inventer le calcul infinitémisal, pourtant appelé par sa mécanique, en raison de l'idéal de stéréométrie qui était le socle épistémologique des Grecs ; il y fallut la familiarité de la notion d'infini depuis le XIe siècle dans l'Occident romano-chrétien. De même, tous ceux qui ont approché les mathématiques indiennes et arabes ont eu le sentiment d'une grande spécificité. Laquelle, par exemple, aurait incité à la construction de logarithmes.

H. LES CATEGORIES MATHEMATIQUES

La théorie des catégories d'Eilenberg et McLean autour de 1950 a confirmé l'introduction des mathématiques dans le MONDE 3. Elle repère des champs mathématiques distincts : les topologies, les ensembles, les ensembles ordonnés, les groupes, les algèbres, les fractales, etc. Elle exige que ces champs soient adéquatement décrits quant à leurs structures et à leurs opérations, et deviennent ainsi des catégories, selon une désignation audacieuse qui fait référence aux catégories du langage et de l'être proposées deux millénaires avant par Aristote. Elle aperçoit que les catégories ainsi comprises sont reliables et transformables entre elles, par des flèches nommées foncteurs (plus ou moins "naturels"). Elle aboutit à concevoir une catégorie des catégories. Elle précise que cette catégorie ultime n'est pourtant pas la mathématique des mathématiques, mais une mathématique parmi les autres (sous peine de raviver la contradiction de la classe des classes, signalée par Russell dès le début du siècle).

C'est pourquoi notre chapitre est intitulé les mathématiques, et non pas la mathématique, comme il l'aurait été il y a un demi-siècle, dans la première mouvance des Bourbaki. Le titre du chapitre suivant sera les logiques, et non pas la logique, pour des raisons similaires.

I. MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

1. Eclairements et recouvrements réciproques

Comme les logiques sont proches du langage, les mathématiques sont proches de la physique, l'exemple classique en étant ce que le calcul différentiel de Newton-Leibniz a apporté pendant trois siècles à la mesure des mouvements, dont ceux des étoiles, des planètes, des atomes. Mais il y a plus. Dans certains cas, comme celui des deux Théories de la relativité, on a vu le géomètre (Riemann) précéder d'un demi-siècle le physicien, et donner l'impression que la théorie physique, et l'Univers qu'elle calcule, est pour finir une mathématique réifiée.

Or, on trouve aujourd'hui le cas inverse : celui où le physicien précède le mathématicien. L'étude des variétés de dimension 3 et 4 s'est fortement éclairée depuis une quinzaine d'années de la théorie quantique des champs ou la mécanique statistique <Poénaru dans R.janv98,70-75>.

Et peut-être faut-il adjoindre à cela, qui touche l'essentiel, le fait que certains domaines de la mathématique disposent maintenant d'une écriture cinématique invertible qu'on pourrait dire physique ou physicienne. Le CD-ROM permet de réaliser les états d'une fonction sous forme d'un phénomène expérimental, - une image sur un écran avec l'électronique qui est derrière, - les faisant alors avancer, reculer, insister à volonté autour de leurs bifurcations, qui en sont les singularités les plus prégnantes. Et ce côté physique de l'écriture est aura été d'autant plus frappant qu'il intervenait à propos de la mathématique du Chaos, c'est-à-dire des systèmes dynamiques discrets non invertibles, qui sont justement les phénomènes physiques les plus courants. Ainsi, Springer-Telos a produit en 1997, sous la signature de Ralph Abraham, Laura Gardini et Christian Mira, un ouvrage intitulé Chaos in Discrete Dynamical Systems, qui combine (1) une propédeutique mathématique, (2) un programme CD-ROM permettant une visualisation cinématique invertible des états de fonction, (3) les échos de pareille visualisation dans le champ de la mathématique pure.

Cela fait une curieuse symétrie au XXe siècle. Commencé par un cas extrême d'influence de la mathématique et de son écriture sur la physique (calcul tensoriel et théories de la Relativité générale de 1905-1915), et finissant par des cas inverses de l'influence de la physique sur la mathématique, dans ses objets propres (les variétés de dimensions 3-4) et dans son écriture de phénomènes physiques (le chaos). Et l'on se demandera si pareille circularité, mathématique >> physique, physique >> mathématique, n'achèverait pas, autant que la théorie des catégories et des topos, l'entrée du mathématicien dans le MONDE 3.

2. Une question épistémologique et ontologique

C'est alors le lieu de revenir sur une question qui se pose maintenant depuis un siècle. Comment comprendre la rencontre qui a lieu si souvent (toujours?) entre d'une part l'ordre de l'Univers (la physique) et d'autre part ce qui semble n'être qu'une construction écrite ou mentale d'espaces cohérents (les mathématiques)?

Cette question est épistémologique, ontologique, même métaphysique, comme on voudra. Mais elle concerne l'anthropogénie, qui la renconre autour des lointaines origines d'Homo, et lui apporte même quelques ouvertures. En effet, elle signale que l'Univers est ce système physique qui en quelque milliards d'années a finit par produire la station debout, et en conséquence la latéralisation, le doigt index, le cerveau indicialisant devenant aussi indexateur. En même temps, quand elle considère l'organisme hominien, la mathématique lui apparaît comme la théorie générale des indexations et la pratique absolue des index. Alors, le fait que l'Univers, qui produit les indexations, et la mathématique, qui produit des théories des indexations autour du trait-point avec son mapping, se rejoignent parfois n'est pas paradoxal. D'autant qu'entre les deux a d'abord surgi, comme transition anthropogénique, l'écriture langagière, celle intense des empires primaires et celle transparente du MONDE 2, et l'écriture graphique, les schémas cadastraux du ciel et des terres, deux exploitations paroxystiques du trait-point.

A quoi on serait tenté d'ajouter que, de toutes les variétés topologiques de dimensions 1 à n, ce sont les variétés de dimensions 3-4 qui sont les plus riches. Or, c'est elles qui concernent le plus pertinemment la réalité physique de l'organisme d'Homo, avec ses trois dimensions d'espace et une de temps. Et elles aussi dont la calculabilité exige du mathématicien un détour par la théorie physique (des quanta et de la mécanique statistique).

Enfin, on considérera que l'application (plicare, ad), traduite plus clairement en anglais par mapping (napper, cartographier), est l'opération primaire de la mathématique mais aussi de la réalité physique (dans les feuillets de la géologie comme dans ceux de l'embryologie). Par quoi les deux domaines ont assurément des accointances. Rien n'empêche de croire que celles-ci seront exaltées dans les années qui viennent par les compléments que l'écriture cinématique invertible (CD-ROM), par là physicalisante, ajoutera à l'écriture mathématique statique traditionnelle, fascinante et platonicienne.

La question n'est pas mince, puisque l'enjeu du rapport mathématique/monde est aussi, plus généralement, le rapport techno-sémiotique/monde, c'est-à-dire le rapport Homo/monde. Il faudra y revenir à propos des théories de choses <20F2>.

*   *   *   *

Situation du chapitre

On pourrait croire que, dans une anthropogénie, le chapitre sur les mathématiques est un luxe. On espère que les considérations qui précèdent, si imcomplètes soient-elles, auront suffi à montrer que c'est tout le contraire. Anthropogénie et mathématiques s'éclairent au plus profond parce que toutes deux sont élémentaires, c'est-à-dire retournent aux éléments d'Homo dans l'Univers physique. Tels le trait-point, avec le mapping (application) qu'il implique. On en dira autant du chapitre suivant, sur les logiques, liées au langage et au pas.