Henri Van Lier, ANTHROPOGENIE

Chapitre 14 - La mathématique et la logique

A. LE TRAIT-POINT(S) CONCRET
- 1. Le trait et le point
- 2. Analogie et digitalité du trait-point(s)
- 3. La dynamique du trait-point(s)

B. LA PURIFICATION DU TRAIT-POINT(S)

C. L'EQUIPOLLENCE DES INDEX ET DES INDEXATIONS PURS

D. LES EQUIVALENCES DES INDEX PURS
- 1. La monstration des équivalences
- 2. La démonstration des équivalences
- 3. La formalisation des équivalences
- 4. La radicalisation de l'évidence
- 5. L'axiomatisation des systèmes
  - a. La redéfinition de l'axiome. De la vérité à la cohérence
  - b. De l'analogique au digital
- 6. Axiome et postulat
- 7. La mathématique comme construction de l'espace

E. L'INVENTION MATHEMATIQUE
- 1. Le déclenchement de l'invention
- 2. L'incubation de l'invention
- 3. Les appels à l'invention
  - a. Les problèmes techniques et physiques
  - b. Les disponibilités instrumentales
  - c. Les malaises théoriques
  - d. La connivence avec les sollicitations

F. LES PRESTIGES DE LA MATHEMATIQUE

Jeu, prestidigitation, syntaxe pure, magie, autarcie, apriorité, éternité, origine, transcendance et immanence, mathèse par excellence

G. LA LOGIQUE, OU INDEXATION PURE DES INDEXABLES SEMIOTIQUES :
- 1. Une notion extensible
- 2. Une pratique archaïque
- 3. La théorie logique
  - a. Les logiques de l'échange du MONDE 1
  - b. Les logiques de l'être du MONDE 2
  - c. Les logiques des termes du MONDE 3

COMPLEMENT : René Lavendhomme, LA FLECHE

Les index, introduits par la stature d'Homo dans l'Univers <3>, sont des signes vides, qui donc ne sont pas perturbés ou troublés par leurs désignés, comme c'est le cas pour les indices, les images et les mots. D'autre part, ils ont une charge propre suffisante pour les rendre largement indépendants des effets de champ ambiants ; ils peuvent ainsi devenir facilement de "bonnes formes", comme des cercles, des rectangles, des sinusoïdes, des chiffres, des signes d'opérations. Enfin, bien qu'ils s'expriment aussi de façon gestuelle et parlée, ils tiennent remarquablement dans l'écriture, d'autant qu'ils sont réductibles à des traits et à des points, lesquels suffisent à produire les figures, les chiffres, les signes d'opérations.

Pour ces trois raisons, et d'autres qui en découlent, les index sont aptes à exprimer des indexations adéquates, et à faire que ces indexations s'appliquent l'une sur l'autre adéquatement, ou deviennent fonction l'une de l'autre. Ainsi, Homo fut invité très tôt, en tout cas depuis les empires primaires, à édifier une théorie générale des indexations pures, et une pratique absolue des index purs. C'est cette démarche de purification et de généralisation que l'anthropogénie vise sous le nom de mathématique.

A. LE TRAIT-POINT(S) CONCRET

L'anthropogénie de la mathématique commence alors par l'éloge du trait, lequel comporte et entraîne l'éloge du point.

1. Le trait et le point

Le trait est souvent le résultat d'un point, qui est son point de départ, à partir duquel il se tire. Ce point est parfois très marqué, comme dans l'écriture cunéiforme, où le style du scribe s'enfonce d'abord fermement dans l'argile, pointe celle-ci, et de là tire le trait. Le trait tiré résulte alors d'un déplacement du point jusqu'à un autre point, son point d'arrivée. Entre les deux extrêmes, il est comme un cordon, un fil de lin (linum), une ligne (linia, linea). En mouvant cette ligne, il engendre des surfaces, qui engendrent des volumes, selon la suite : point, ligne, surface, volume. La ligne (grammè) est une longueur (mèkos) non épaisse (aplatHes), définit Euclide.

Dans cette vue, le point est progressivement apparu à Homo comme l'index ultime : celui du départ et de l'arrivée, du retour, de la station, de la proximité et de l'éloignement, de l'intersection, de la bifurcation et de la décision minimale, de la boucle qui se ferme. Comme aussi le minimum d'acte (le trait le plus court), le minimum perçu (visible, tactile), le minimum de déterminations, l'absence de partie. En grec, c'est le même mot sèmeion qui dit "signe" et "point", signe minimal ; le point est ce dont il n'y a pas de partie (meros), dit Euclide. On comprend ainsi son rôle dans la ponctuation du phrasé, et le français en a conçu sept modalités : point simple, point et virgule, deux points, point d'exclamation, point d'interrogation, points de suspension. En arabe, comme signe épicritique, sur et dessous le trait, il fait basculer la portée des consonnes.

Cependant, anthropogéniquement, le point lui-même est le résultat d'un trait, de la piqûre d'un dard. C'est ce que le grec a marqué en désignant le point le plus fécond, le centre d'un cercle, par "kentron", de la même racine que "kentein", poindre d'un aiguillon ou d'un dard d'abeille. Ce que le latin a confirmé en gardant "kentrum" (centrum, centre), et en y ajoutant "punctum" (point), autre piqûre d'aiguillon-dard (pungere, poindre). L'anglais "point" et l'allemand "Punkt" ont les mêmes dénotations et connotations. Du reste, la façon la plus stricte d'obtenir un point est de provoquer l'intersection de deux traits.

Aussi le conflit du trait et du point, c'est-à-dire le choix de l'un ou de l'autre comme élément premier ou ultime, ou encore la volonté d'engendrer l'un à partir de l'autre, court à travers l'anthropogénie. Les Chinois ont remplacé par un trait court le point, trop fixement pointu pour leur ontologie, qui postule des conversions (négations inclusives) réciproques universelles yang-yin. Par contre, le point devait être l'archétype dans la transcendance inconditionnelle de l'Islam. L'Egypte accentua tantôt l'unité de l'oeil solaire, dans la période amarnienne et dans son Livre des morts, tantôt la multiplicité des traits-rayons qui en sortent. Peut-être l'écriture cunéiforme nous impressionne-t-elle tant parce qu'elle conjoint le point et le trait au plus étroit.

Le débat sur la primauté du trait et du point a couvert l'anthropogénie de la mathématique depuis au moins les Pythagoriciens, qui tentèrent d'établir des équivalences entre les figures de la géométrie, composées de traits, et le calcul des calculi, petits cailloux figurant des points virtuels, jusqu'au calcul infinitésimal et à la théorie des ensembles. Laissons les débats de Platon et d'Aristote, dont les choix s'inspirent de vues philosophiques. Il reste que, si le trait, à ses extrémités et à ses croisements, engendre fatalement le point, celui-ci par contre n'engendre le trait qu'en tendant vers ou à (ad) lui, en se multipliant ou en se déplaçant selon un "vers", un "tendre à", un tracé, exotropique ou endotropique, dont le mot trait dérive. La notion de voisinage d'un point, qui ouvre la topologie, débouche de même sur celle de chemin. En grec, le stoïcheïon, l'élément, n'est pas d'abord le point, dit sèmeïon, mais un petit trait.

Ainsi le trait-point(s), c'est-à-dire le trait avec un point à une extrémité, ou deux points à ses deux extrémités, - et dont on voit assez qu'il est supposé par toute mesure et même par toute application (mapping), - déclenche la théorie générale des indexations et la pratique absolue des index, c'est-à-dire la mathématique. Et il est aussi décisif dans la logique, puisque c'est lui qui exprime les basculements entre affirmation et négation. En français, pour nier quelque chose, ou bien on refuse le pas (passum), ce trait de base produit par la bipédie d'Homo : "non...pas", "ne...pas", "il n'y en a pas". Ou bien on refuse le point (punctum) : "non...point", "ne...point", "il n'y en a point".

Dans une formule simplifiée mais efficace, on peut dire que, si le point est la brique ultime dont la neutralité se prête à ce que le mathématicien en construise ses variétés avec un minimum de présupposés, le trait, comme tracé et tracement (chemin et proximité), est le moteur qui fait que quelque chose se passe entre ces neutres, lesquels sont si neutres que de soi ils sont inertes.

2. Analogie et digitalité du trait-point(s)

Le trait-point(s) a l'intérêt pour Homo de conjuguer le plus étroitement l'analogie et la digitalité. Il analogise quand il engendre des mimes de presque toutes les situations concrètes, des images, mais aussi des "bonnes formes" : rectangle, cercle, sinusoïde, courbes de Gauss, courbes en S, etc. Inversement, il digitalise, ou macrodigitalise, c'est-à-dire réalise des désignations par exclusions dans des panoplies et protocoles fermés quand il tranche et suscite les couples haut/bas, droite/gauche, ouvert/fermé, proche/lointain ; mesure, additionne/soustrait, et donc aussi multiplie/divise ; distribue par application les ordinalités autant que la cardinalité ; définit des points plus et moins voisins ; resegmentarise des ensembles en en mettant des portions entre des parenthèses ou devant des accolades. Etc.

L'activité digitalisante du trait-point(s) est même si spontanée que c'est lui qui a fourni les métaphores du situs et de la situation : faire le point ; et de l'opposition, comme quand on parle de traits oppositifs en phonématique et en sémantique.

La géométrie analytique, où la ligne-trait et sa position dans un référentiel deviennent $y = ax + b$, fut un tel moment décisif de l'évolution d'Homo parce qu'elle lui fit saisir dans une intuition quasi instantanée que l'analogie et la (macro)digitalité du trait-point(s) non seulement se conjuguent mais se donnent réciproquement à voir et à comprendre.

3. La dynamique du trait-point(s)

Le trait point(s) est le statisme même. Et pour en saisir toute la force à cet égard, il faut invoquer en dernier ressort la lumière. Propagée en ligne droite, du moins dans les conditions de gravitation modérée de la Terre, elle permet à l'oeil d'Homo, globalisant et focalisateur, de décider si un donné est courbe ou rectiligne selon que certaines parties y font écran à d'autres, qu'il s'agisse d'un bâton, d'un chemin ou d'une surface. C'est elle aussi qui, créant des ombres, suscite les lignes strictes des contours, et définit le point pur, quand deux ombres se croisent.

Cependant, malgré sa rigidité exemplaire, le trait conserve toujours un dynamisme interne. Même écrit, il continue d'être tiré-tendu, de donner à sentir l'action-passion de tirer-tendre, comme l'indique son ancêtre latin "tractus-us", qui est un substantif verbal, et non un substantif d'objet ou d'état. C'est pourquoi le trait est si apte à exprimer des mouvements, parmi lesquels l'application, l'implication, la translation ; et à suggérer des mouvances, ces mouvements particuliers qui trahissent les forces dont ils procèdent, comme dans le cas d'un vecteur (vector, celui qui traîne, transporte). Aussi, les extrémités du trait sont des limites dans les deux sens du terme : des points qui marquent un seuil (limes,itis), mais aussi des points qui attirent, des pôles qui déterminent un "tendre vers". Ce dynamisme du trait(s) résulte d'une confluence d'au moins deux facteurs, où Homo engendre la mathématique, et où la mathématique en retour engendre Homo.

Le plus ostensible est la stature hominienne : (a) le bras (bracchium) qui braque (bracchiare) ; (b) le doigt index qui pointe ; (c) le regard qui darde ; (d) le corps dressé sur le sol qui pique et se fiche, comme un épieu ; (e) les deux mains planes symétriques qui tranchent et clivent les choses ou les délimitent en faisant courir sur elles les traits-pointes de leurs doigts tendus ou déployés. Ou qui s'appliquent l'une sur l'autre selon des fonctions diverses. Ou encore qui créent entre elles des symétries, des résonances, des effets de miroir, des miroitements.

Mais ce corps traceur et pointeur n'aurait rien pu sans un cerveau mammalien apte à l'utiliser. Dès l'animalité antérieure, le pointage, la ligne et surtout la droite, ligne dirigeante et dirigée (regere, dis, duo, conduire en faisant bi-furquer) a une importance vitale dans la fuite, l'atteinte de la proie, du partenaire sexuel, du congénère, du nid, ou tout simplement parce que c'est le référentiel le plus économique dans un environnement. Ainsi, dans les premières aires de réception visuelle, le système nerveux des Mammifères commence par faire ce qu'il fait partout : renforcer ce qui saille quelque peu et estomper le reste, mais aussi privilégier les droites verticales et horizontales comme référentiel de gravité (Orban, Neuronal Opération in the Visual Cortex, Springer, 1984). A quoi aident encore souvent des exaltateurs cérébraux, neuromédiateurs chargés de soutenir des comportements importants et difficiles, comme la course du guépard derrière l'antilope.

Tout cela fait que le trait-point(s) est ce qui se stocke le mieux en mémoire, et donc se retravaille le plus commodément. Avec des conséquences importantes pour les élaborations mathématiques exotropiques, mais aussi endotropiques.

B. LA PURIFICATION DU TRAIT-POINT

On mesure alors les aisances et les difficultés de la mathématique. Elle profite de l'élan perceptivo-moteur et pulsionnel d'Homo lorsqu'il s'agit du trait et particulièrement du trait droit, de la droite, comme l'illustrent dès les images du paléolithique supérieur les "bonnes formes" du triangle de la vulve verticalement fendue et de l'angle aigu du pénis érigé, tous deux aussitôt enrichis, semble-t-il, de significations cosmologiques. Comme également des points (pointes) de dards, qu'on trouve un peu partout frappés près des animaux des grottes.

En même temps, pour que les index soient purs, c'est-à-dire déchargés de leur charge <3B2>, il faut refroidir les ardeurs des traits-point(s), n'en garder que les aspects d'indexations comme telles. Pour quoi il y a deux recours. (1) Profiter, dès le niveau sensoriel, du fait que ce sont de "bonnes formes" et qu'ils donnent lieu à de "bonnes formes" (triangle, rectangle, cercle), c'est-à-dire à des formes résistant aux attractions de leur environnement perceptif. (2) Profiter, dans les élaborations cérébrales ultérieures, de la neutralisation sensorielle (conceptualisation) dont sont capables les aires cérébrales hominiennes dites associatives, et qui réussissent particulièrement bien leur travail sur des signes vides <3C>.

Cette purification fut lente dans l'anthropogénie. La ligne d'échine des images du paléolithique supérieur est déjà une ébauche de trait courbe ou droit, mais encore tout vibrant de l'échine qui l'engendre. Le cadre du néolithique est un rectangle, mais qui se gonfle des parturitions auxquelles il permet de se référer. Le sous-cadrage des empires primaires est exact, mais il se tranche en Egypte ou s'écrase au Mexique des flux d'autorités et de justifications qu'il relaie.

En fait, il fallut attendre que le continu-distant du MONDE 2 succède au continu-proche du MONDE 1 pour que les index purs se prennent comme thèmes dans leur pureté. Moment où le regard dans la "juste" distance du "tHeatron", donc du ni-trop-proche-ni-trop-lointain, permit aux Pythagoriciens, sur le trait de la corde d'une cithare, de poser les points de pincement et donc aussi les lignes d'intervalle correspondant aux proportions internes (harmonie) des écarts sonores. Moment où s'introduisit la première écriture transparente, non plasticienne, car la mise en place de la mathématique développée eût été impossible dans les ferveurs graphiques de l'écriture égyptienne, chinoise, indienne ; ou dans le bricolage de l'écriture phénicienne. Moment de triomphe du logicisme exarcerbé de la langue grecque, avec ses deux conjonctions purificatrices : un "hè" réduplicatif, qui voulait dire "en tant que" ; un "gué" précisif, qui voulait dire "pris en rigueur".

Alors, il y a 2,3 mA, le trait en tant que trait et le point en tant que point, voire l'indexation en tant qu'indexation, purent donner libre cours à leurs applications et fonctions rigoureuses chez Euclide et Archimède. Par quoi Homo transforma localement et transitoirement le Réel en Réalité, c'est-à-dire en une part du Réel apprivoisée dans ses signes.

Enfin, quand les continus proche et distant des MONDES 1 et 2 cédèrent la place au discontinu (aux sauts de point de vue) du MONDE 3, le trait-point(s) se neutralisa, se purifia tellement qu'il donna lieu à des espaces possibilisés qui ébranlèrent pour Homo le confort de sa Réalité par l'intrusion d'un Réel. Montrant ainsi que la purification mathématique était moins affaire d'ablation que de construction, comme cela se confirmera plus loin.

C. L'EQUIPOLLENCE DES INDEX ET DES INDEXATIONS PURS

Ce qui fait la nature et la force de la mathématique c'est, en même temps que la radicalité perceptive et pulsionnelle des traits-points et leur disponibilité à la purification, la proximité extraordinaire qu'ils entretiennent avec les indexations auxquelles ils correspondent, c'est-à-dire avec les actes cérébraux exotropiques et endotropiques qui s'y réalisent.

En effet, contrairement aux inadéquations qui existent entre désignants et désignés dans les indices et dans les signes pleins du langage et des images, et dans les index impurs du geste technique et du pouvoir, on ne trouve dans l'emploi des index purifiés de la mathématique que trois choses : (a) des indexations pures, comme fonctionnement cérébral exotropique et endotropique, (b) des index gestuels et parlés, endotropiques et exotropiques, où ces fonctionnements s'extériorisent, (c) des index écrits où s'inscrivent et s'appuient les index gestuels et parlés sous forme de traits-points écrits. Or, la première et la troisième de ces trois couches se recouvrent là opératoirement et intentionnellement, même si elles ne sont pas équivalentes matériellement. On peut les dire équipollentes (pollere, aequum, avoir puissance égale). Grâce à cette équipollence, l'écriture mathématique exprime la mathématique même, alors que les écritures langagières ou idéographiques renvoient toujours largement à quelque chose d'autre que leur visée, et cela même quand elles sont autarciques comme l'écriture chinoise.

Demeure pourtant un décalage subtil. Car, quand il écrit des traits-point(s) en forme de triangle, ce n'est pas d'eux qu'Homo mathématicien dit qu'ils sont un triangle et que les trois angles de ce triangle sont égaux à deux angles droits, puisque les traits graphiques tremblent et bavent, avec tous les aléas de phénomènes physiques. Il est donc vrai qu'en rigueur la mathématique travaille non sur les index comme tels mais sur les indexations neutralisées (pures) qu'ils incorporent et qui seules fournissent les vraies formes, dont le triangle écrit au tableau n'est qu'une figure : "formae figura", distinguait déjà Lucrèce.

Cependant, pour finir, dans le triangle équilatéral dessiné, le cerveau mathématicien, qui manie la figure, ne manie pas les bavures de la craie, ni les différences des angles et des côtés, il manie des traits et des points opératoirement et intentionnellement purs. Et cela en raison de ses complicités signalées plus haut avec le trait-point(s) comme tel. Un médiéval eût dit que, dans l'exercice de la mathématique, Homo manie les index (physiquement impurs) sous les espèces de l'indexation (pure). Cette implication de la forme dans la figure invita, du reste, à rendre cette dernière la moins impure possible, qu'il s'agisse des angles des rectangles des cadres au sol et au mur de Catal Hüyük, ou des "bonnes formes" du bord d'un jeton de comptage qui indiquaient les nombres des objets comptés à la même époque. Si bien que l'effort de rectitude du néolithique dans ces deux cas marque un premier début d'Homo mathématicien.

Cette tension entre index et indexation a fait deux virtualités complémentaires qui sont la mathématique elle-même. Les indexations pures et encore endotropiques, presque purement cérébrales, ont une souplesse, une vastitude, une rectitude, une ponctualité, que seuls permettent les circuits cérébraux associatifs (conceptuels, sensoriellement neutralisants). Et c'est ce qu'on vise quand on parle de concepts mathématiques, en soulignant que jamais une figure écrite ou dite ou gesticulée n'aura les propriétés d'un concept.

Mais en même temps, les index-traits-points concrets, là sous les yeux, ont le mérite d'être strictement transversalisés et transponibles pour Homo transversalisant et substitutif. Et comme en ce cas c'est bien de substituabilité, de transponibilité, d'application, de fonction, de proximité et non-proximité topologique, et parfois d'égalité et inégalité géométriques et algébriques qu'il s'agit, l'index manié exotropiquement a des vertus que l'indexation endotropique n'a pas. Cela est si vrai que, pour raisonner richement sur le cube, Homo mathématicien n'a guère trouvé mieux que de réduire ses trois dimensions, fuyantes, aux deux dimensions de la surface d'un support sur laquelle les traits-points se possibilisent à souhait. Pour l'efficacité, l'écriture mathématique est parfois presque la mathématique même. On en donne comme exemple classique les retards pris un moment par le calcul infinitésimal anglais en raison de sa fidélité à la notation de Newton, moins parlante et prégnante que celle de Leibniz pratiquée ailleurs. Que serait devenue la théorie des nombres si elle avait travaillé avec les chiffres romains plutôt qu'avec les chiffres arabes?

En sorte qu'il faut distinguer deux imaginaires mathématiques, c'est-à-dire deux saisies cérébrales endotropiques d'indexations pures: l'un de vision, l'autre de calcul. (a) L'imaginaire de vision est bien illustré par la géométrie euclidienne, la géométrie analytique de Descartes et projective de Desargues, où les traits maniés sont encore assez proches de l'espace perceptivo-moteur tridimensionnel pour que le mathématicien voie ce qu'il graphie, et aussi ce qui s'y meut. Descartes croyait que, moyennant quelque entraînement, un spécimen hominien pouvait arriver à une sorte de vision mathématique divine, à son sens simultanée. (b) Par contre, la géométrie de Riemann, qui part du postulat qu'on ne peut mener aucune parallèle à une droite, illustre un second cas, où l'espace perceptivo-moteur tridimensionnel macroscopique, seul maniable exotropiquement et même endotropiquement par le cerveau d'Homo, est déjoué. On pourrait parler là d'un imaginaire de calcul, voire d'écriture, de scription.

Il serait faux de croire que ce second imaginaire ne voit ni ne saisit pas du tout ce qu'il manie. Plutôt, il le saisit et même souvent l'anticipe, mais à l'occasion et dans le soutien du calcul, gestuel, parlé et surtout écrit. Cette fois les index des traits-points purs ne se contentent pas de porter et faciliter l'indexation, ni d'en faire voir des implications visibles. Par leurs mouvements indexateurs, ils la conduisent là où elle ne serait pas allée sinon, là où elle ne peut savoir qu'elle va que dans la mesure où ils l'émettent et la contrôlent. Certains textes de Riemann et certains regards de Poincaré donnent à sentir cette sorte de franchissements non-présentiels émis et soutenus par des fonctionnements présentiels. Et dans tout ceci on précisera, avec Bouligand, que la 4e dimension (et donc aussi l'espace-temps quadridimensionnel) a un statut à part, un privilège, en ce qu'il en existe encore des représentations combinatoires, préhensibles au moins successivement. Sorte de sas initiatique entre le visible et le seulement calculable ou écrivable.

D. LES EQUIVALENCES DES INDEX PURS

Vu ce qui précède, un système mathématique tient en une suite d'équivalences d'indexations et d'index purs à d'autres, sans que jamais une proposition équivale à sa contradictoire ; en d'autres mots, sans que "p", qui est une proposition dans le système, puisse être équivalent à "non-p" ; c'est ce qu'on appelle d'ordinaire la cohérence d'un système. Le pragmatiste Peirce l'a justifiée de façon pragmatique en faisant observer qu'un système d'équivalences où certaines propositions pourraient équivaloir à leur contradictoire permettrait de proposer (démontrer) n'importe quoi, et serait donc stérile. D'autre part, l'anthropogénie donne à voir que, si Homo affectionne parfois l'incohérence et l'incommunicabilité, sa technique et même sa vie sociale l'obligent à quelques îlots de cohérence et de communicabilité. La mathématique en est une des occasions favorables.

1. La monstration des équivalences

Dans les cas simples, les équivalences écrites ainsi que les définitions, axiomes et postulats implicites qu'elles présupposent sautent aux yeux pour la vision primatale d'Homo, à la fois focalisante et globalisante, et dont les productions perceptives sont encore abstraites (neutralisées sensoriellement) dans les aires d'association. Quelques constructions adventices sont parfois nécessaires, mais la simple monstration de la figure ou de l'équation redisposée suffisent à l'évidence. Le rôle de la mémoire dans le parcours est insensible. Hugo Steinhaus a fait un bon recueil de ces cas dans Mathematical Snapshots (Oxford, 1960), Mathématiques en instantanés (Flammarion, 1964).

2. La démonstration des équivalences

Mais il arrive souvent que la suite des équivalences et des appartenances soit trop longue pour être embrassée d'un coup d'oeil. Et Homo mathématicien s'habitua progressivement à la démonstration (monstrare, de), c'est-à-dire à une situation où la monstration suppose un départ (latin "de"), qui est parfois lointain. Le problème est alors celui de la mémoire, de ses aléas, de sa non-évidence. Descartes,

voulant éviter ces périls, et surtout désireux de simultanéité classique (règle des trois unités de la tragédie), rêvait de démonstrations si bien disposées et d'un démonstrateur si éveillé que la suite "a = b, b = c, c = d" donne l'évidence instantanée de "a = d", et ainsi de suite : "a = e = f...". Cet objectif avait un sens dans sa pratique, qui était une mathématique des proportions, si imbricables que leur saisie confortait l'assurance d'un Moi majusculé comme substance pensante (deuxième mémoire bergsonienne).

Cependant, cette prétention devint intenable lorsque l'analyse infinitésimale ne permit plus cet embrassement instantané. La démonstration supposa alors de plus en plus souvent l'appel à une mémoire de stockage (première mémoire bergsonienne), dont seules faisaient foi les continuités vérifiables de l'écriture. Et il se mit en place une rhétorique de la démonstration mathématique, consistant à éviter deux excès, puisque trop peu de détails créaient des failles de démonstration, et que trop de détails faisaient perdre le fil.

L'écriture mathématique cessa de se percevoir comme seulement l'expression (premere, ex, presser dehors) et le dépôt d'une pensée-geste-parole mathématique, censée l'essentiel, pour devenir elle-même le foyer de l'action-passion mathématisante, avec ses logiques et ses spontanéités. Et le problème de la mémoire mathématicienne ne fut plus métaphysique, comme chez Descartes, mais devint physique, ou mécanique. Peirce crut même que la mathématique était l'art de la démonstration.

3. La formalisation des équivalences

La prédominance du calcul écrit conduisit Homo à des monstrations et démonstrations dont tous les termes et opérations seraient, sinon mécaniques, du moins mécanisables. Assurément, ceci supposait que, dans les indexations, toute trace d'approximation et d'indicialité ait disparu. C'est ce que visa d'obtenir Leibniz. Le mot "formalisation", hérité de la métaphysique médiévale, a souvent désigné douteusement cette démarche, où il était question moins de "forme" et de "formation" que d'automaticité. Leibniz rêvait d'une machine à tirer des conséquences.

L'anthropogénie notera qu'une fois de plus la pratique mathématique concordait ici avec une métaphysique : étant l'ensemble des meilleurs compossibles, le monde leibnizien, appelait un calcul indépendant d'un calculateur, jusque dans la pensée divine.

4. La radicalisation de l'évidence

La formalisation eut une première conséquence. En réduisant le travail mathématique à des éléments et à des opérations mécaniquement calculables, elle mettait à nu que le calcul, censé évident, avait des présupposés qu'il fallait expliciter pour que la mécanicité réussisse. Les évidences premières n'étaient pas toujours si premières, comme il apparut aussitôt à Leibniz, grand formalisateur.

Par exemple, la géométrie, cette métrie de la terre (guê metria), mit à jour qu'elle reposait sur une théorie générale du topos, du lieu, voire du site, où régnaient les notions beaucoup plus fluides de points voisins, de chemin, de noeuds et de tores, de plis, de fronces, d'ailes, où la mesure étalonnable n'intervenait pas. De la sorte, elle se situa comme un cas particulier de la Topologie, celui où règnaient des transportabilités fixes, et donc aussi des étalons de mesure. Des radicalisations semblables se retrouvèrent dans d'autres champs de la mathématique, comme la théorie du nombre.

5. L'axiomatisation des systèmes

En même temps, la formalisation donna à voir, par l'aisance de ses transponibilités d'écriture, que la suite des équivalences dans un système pouvait parfois y être partiellement inversée sans qu'aucune proposition y soit perdue. Autrement dit, étant donné des propositions initiales non démontrées et des propositions déduites, on pouvait parfois prendre certaines de ces dernières comme initiales, et retrouver les premières comme déduites. Cette circularité systémique fut sans doute suspectée chez Leibniz, esprit combinatoire, mais ne fut fermement dégagée qu'autour des années 1900.

a. La redéfinition de l'axiome. De la vérité à la cohérence.

Ceci entraîna un bouleversement majeur, qui fut pour beaucoup dans le passage au MONDE 3. Car il ne faut pas s'y tromper. Tous les géomètres et mathématiciens durant tout le MONDE 2 avaient été convaincus que leur système partaient d'axiomes (axiomata, propositions jugées valables), lesquels selon l'étymologie impliquaient trois choses : l'évidence psychologique, la primauté logique, la non démontrabilité, de fait ou de droit. C'est ce qu'illustre encore Leibniz quand il réclame qu'un axiome jugé premier soit remonté autant que possible vers un axiome plus premier, voire le plus premier. Cette régression finie de l'évidence concordait avec la définition classique de la vérité censée être une "adéquation entre l'intelligence et la chose" (adaequatio rei et intellectus).

Or, la circularité (partielle) des propositions initiales et des propositions dérivées, favorisée par la formalisation, entraîna la redéfinition de l'axiome comme une proposition choisie initiale, non en fonction d'une évidence ou intuition "objectives", ou d'un statut ontologique ou épistémologique de primarité, mais en raison des avantages systémiques qui découlait de sa formulation et de son élection à cette place : clarté et bon ordre des thèorèmes, fécondité du système, c'est-à-dire densité et ouverture de l'ensemble de ses propositions. Moyennant cette redéfinition des axiomes (proposition choisie initiales), et donc aussi des théorèmes (proposition choisie dérivée), la circularité systémique put s'énoncer commodément comme la permutabilité (relative) des axiomes et des théorèmes dans un champ mathématique donné.

Du même coup, au lieu de vérité, on attendit d'un système la cohérence ou consistance, c'est-à-dire que la proposition "p" et sa contradictoire "non-p" ne s'y retrouvent jamais équivalentes. Et cela, à nouveau, non parce que cela aurait heurté une quelconque Raison, ou Logos, mais pragmatiquement parce que cela aurait permis dans un système de démontrer n'importe quoi, ce qui l'aurait rendu stérile (Peirce).

En discréditant l'intuition immédiate, le remplacement de la vérité par la cohérence (consistance) renforça l'imaginaire de calcul, ou d'écriture <14C ad finem>. Car, autant l'intuition (cartésienne) est immédiate, autant le critère de cohérence s'étale dans le temps. Prendre pour proposition initiale que dans un plan par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une infinité de parallèles (Lobatchevski) ou aucune (Riemann), et postuler la cohérence des géométries ainsi engendrées, c'est-à-dire affirmer qu'elles ne mènent jamais à la contradiction, est une tâche redoutable. Poincaré l'abrégea quand il fit observer que, moyennant un dictionnaire approprié, les trois géométries euclidienne, lobatchevskienne, riemannienne étaient des traductions (automatisables) les unes des autres ; et que donc supposer la cohérence de l'une, l'euclidienne, c'était supposer celle des deux autres. Mais ceci était bien calcul, ou écriture, non intuition.

Toutes les branches de la mathématique multiplièrent ces prévalences de l'écriture. Tels, dans la théorie des nombres, ces nombres "transfinis" de Cantor, par exemple le dénombrable obtenu comme la classe des ensembles pouvant être mis en bijection (one one) avec l'ensemble des entiers.

b. De l'analogique au digital

En même temps, de façon plus subtile, la formalisation et l'axiomatisation au nouveau sens entraînèrent un glissement de la représentation analogique à la représentation digitale, procédant par exclusion dans une panoplie fermée. Ainsi, quand Peirce énonce que la proposition "p" implique la proposition "q", cela voulait dire pour lui que "p" était positivement gros de "q", alors que pour les logiques axiomatisée "p implique q" sera surtout équivalent à "non-p ou q".

Ontologiquement et épistémologiquement, ce glissement de prévalence de l'analogique au digital, typique du MONDE 3, c'était un glissement de l'affirmation inclusive, dont la négation était seulement la contradictoire, et qui autrefois 2 était divine, au profit de la négation oppositive, autrefois satanique.

La mathématique axiomatisante a ainsi secrètement mais sûrement contribué à établir le MONDE 3, cette saisie-construction discontinue où les "choses" tiennent en séries souvent hétérogènes auxquelles on demande seulement de fonctionner de concert. Se déclarant autour de 1850, elle fut contemporaine des nouveaux espaces introduits dans les images plastiques par Manet et Degas. Et elle atteignit sa maturité en même temps que le cubisme de Picasso, le dodécaphonisme de Webern, les effets "quantiques" de Marcel Duchamp.

6. Axiome et postulat

Il sera éclairant, pour l'anthropogénie de la mathématique, de s'arrêter un instant aux avatars, durant plus des deux derniers millénaires, de ce qu'on appelle aujourd'hui le "5e postulat d'Euclide", et dont la formule familière est : "Dans un plan, par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle, et seulement une".

Nos éditions actuelles, appuyées sur un manuscrit du Vatican, distinguent dans les Eléments euclidiens : (1) des horoï (définitions), comme celles du point, de la ligne, du cercle, etc. ; (2) des koïnaï ennoïaï (notions communes), par exemple "deux choses qui sont égales à une même chose sont égales entre elles" ; (3) des aitèmata (demandes, postulats), introduit par "êtêstHô" (qu'il soit demandé) et dont les "trois premiers" sont : (a) la disponibilité de tracer une droite entre deux point, (b) la disponibilité de prolonger une droite indéfiniment dans sa direction, (c) la disponibilité à partir d'un point quelconque de tracer un cercle dont il soit le centre. Toujours sous le même "ètèstHô" (qu'il soit demandé) nos éditions proposent alors un "postulat cinquième": "Et si une droite coupe deux droites et détermine avec elles des angles intérieurs inférieurs à deux droits, ces deux droites quand on les prolonge à l'infini se rencontrent quelque part du côté où les angles sont inférieurs à deux droits".

Or, ceci intéresse multiplement l'anthropogénie. D'abord, elle voit assez là la multiplicité des formulations. Nous partons aujourd'hui d'un point pris hors d'une droite, ce qui permet d'opposer clairement les partis d'Euclide, Lobatschevski et Riemann. Euclide, qui n'a pas la moindre suspicion de ces derniers, et qui d'autre part est un Grec épris d'angles droits part de deux angles égaux ou inégaux à deux droits. Autour de 1650, Wallis, arithméticien des infinis, suivi en cela par Laplace et Carnot, exprime le "cinquième postulat" comme la disponibilité de construire à n'importe quelle échelle donnée une figure semblable à une échelle donnée.

Mais, de façon plus éclairante encore, Proclus, qui au Ve siècle de notre ère travaille certainement sur d'autres manuscrits que nous, n'admet que trois postulats, ceux que nous appelons les trois premiers, et classe donc notre postulat dans les "koïnaï ennoïaï" (vérités communes). C'est sans doute qu'il comprend les postulats comme de simples autorisations de construction, en l'occcurence l'autorisation d'utiliser la règle et le compas ; Lachelier concordera avec lui sur point. Et qu'alors notre "cinquième postulat" lui paraît d'un autre ordre : quelque chose qui touche une propriété du monde-cosmos anciens, et qui rentre donc dans ce que les classiques appelaient un axiome (vérité évidente, première, indémontrable ou indémontré). C'est ce que pensait certainement Wallis, qui crut l'avoir démontré, et encore ces membres de l'Académie des sciences qui, jusqu'au début du XXe siècle, en examinèrent les démonstrations. C'est également ce que pensait Peyrard dans sa première traduction de 1809, où notre "cinquième postulat" apparaît comme un "onzième axiome". En tout cas, il fallut les géométries de Lobatschevski et de Riemann et le concept d'axiome au sens récent pour que le notion de postulat soit redéfinie aussi, et que ce qui avait été ou bien un "onzième axiome" ou bien un "cinquième postulat" soit classé, jusqu'à nouvel ordre, comme un postulat dans ce nouveau sens.

L'anthropogénie remarquera donc à quel point un texte mathématique n'est pas un texte comme les autres. Quelqu'un qui copie ou commente une tragédie ou un texte sacré cherche à s'en tenir aussi exactement que possible au texte d'origine, avec ses mots et son ordre. Or, justement parce qu'ils proposent essentiellement des index et des indexations, signes vides, les textes mathématiques antérieurs à l'imprimerie furent en perpétuelle mutation, sinon de termes, du moins d'ordre, selon les champs mathématique du moment. Enseigner vraiment la mathématique c'est sans cesse et fatalement la refaire. Comme autrefois recopier la musique, autre champ dominé par les index, c'était souvent aussi la recomposer.

Saurons-nous jamais ce qu'Euclide lui-même en pensait? En découvrant de nouveaux manuscrits, penserait-on naïvement? Même pas, car, à moins que ces manuscrits soient autographes, ils auraient déjà toutes les chances d'être des relectures et des reconstructions. La seule approximation viendrait d'une vue aussi profonde que possible du destin-parti d'existence d'Euclide, c'est-à-dire de la topologie, de la cybernétique, de la logico-sémiotique, de la présentivité activées-passivées par les Grecs de son époque. Ce qui conduirait à voir qu'il n'emploie pas "axiomata" mais "koïnaï ennoïaï", que ses "erèmata" semblent bien postuler de simples autorisations de construction, celles de la règles et du compas, que le "cinquième postulat" ne semble pas être une simple règle de construction, etc.

7. La mathématique comme construction de l'espace

Dans le cadre de l'axiomatisation, la valeur d'un système mathématique se mesure alors à sa fécondité, c'est-à-dire au nombre, à l'embrassement, à l'imprévu des équivalences qu'il supporte et coordonne, et surtout à sa capacité de construire de nouveaux espaces. Les axiomes au sens récent ont fait voir qu'il n'y avait pas un espace mathématique absolu préalable, qu'Homo aurait alors à découvrir, selon la vérité grecque conçue comme dévoilement, a-lètheïa, ainsi que le suggérait les axiomes au sens anciens. Mais bien plutôt que l'espace mathématique est, au fur et à mesure de l'anthropogénie, l'ensemble coordonné de toutes les indexations pures possibles introduites par Homo dans l'Univers. En d'autres mots, les index axiomatisés ne décrivent pas l'espace, ni les espaces, ils les suscitent en les indexant de traits-points.

Par son glissement de la vérité à la cohérence, l'axiomatisation, a conféré aux systèmes mathématiques une autarcie. Il importe pourtant de voir que celle-ci est relative. De même que la formalisation peut formaliser les traits-points tracés mais pas leur tracement, de même l'axiomatisation ne peut axiomatiser la postulation et la pulsion systématique d'Homo, qui lui fournissent son mouvement et son principe. Pour finir, toute mathématique, comme toute production hominienne, dépend de phénomènes physiques, en l'occurence d'une stature, d'une vision, d'aires associatives cérébrales, de pulsion à l'exploration, dans un corps particulier. Mais ceci paraîtra mieux maintenant à propos des occasions de l'invention mathématique.

E. L'INVENTION MATHEMATIQUE

L'invention mathématique tient en l'introduction d'une relation mathématique, parfois dite concept mathématique. Par exemple : la situation d'un point ou d'une ligne selon des axes ayant une origine ; la tendance vers une limite ; l'intégration et la dérivation ; le voisinage au sens topologique ; les notions d'ensembles d'éléments et d'applications d'ensembles les uns sur les autres ; les rapports entre fonction et application ; la notion de catégorie ; la définition de la droite dans une géométrie différentielle synthétique, etc.

L'anthropogénie a au moins deux motifs de s'intéresser à l'invention mathématique. La pureté des éléments en jeu y met à nu les stades de toute invention hominienne en général ; Valéry, qui s'intéressait à la poïèse (poïèsis) ou fabrication du poème (poïèma), consacra une attention incessante aux démarches du mathématicien. En retour, ces stades de l'invention en général dévoilent ou précisent la nature de la mathématique. C'est sans doute pourquoi Poincaré a trouvé bon de raconter les circonstances de son invention des fonctions fuchsiennes.

1. Le déclenchement de l'invention

Le récit de Poincaré relève (a) comment le nouveau concept mathématique lui est apparu de façon fulgurante, et cela à l'instant où, prenant un autobus parisien, il mettait le pied sur le marchepied; (b) comment, ayant rejoint son siège, ce concept lui fit sentir aussitôt sa validité et sa fécondité ; (c) enfin comment, dans les jours et semaines qui suivirent, il n'eut plus qu'à mettre en place et à vérifier en rigueur les avenues et les extensions du champ mathématique ainsi créé.

Ce mélange de vitesse et de rigueur tient fondamentament à la nature des éléments en question, qui sont des index purs et des indexations pures, les deux étant en équipollence. Ainsi, un déplacement, une neutralisation, une assimilation ou bifurcation peuvent avoir une vitesse de clarification et de propagation impossible ailleurs, même dans les conversions religieuses ou philosophiques foudroyantes, lesquelles mettent d'ordinaire longtemps à dévoiler leurs présupposés et implications d'indices et autres signes pleins.

2. L'incubation de l'invention

Cependant, l'illumination mathématique suppose aussi une incubation cérébrale permanente. Dans le computer biochimique hybride (analogisant, digitalisant) qu'est le cerveau, où les constructions sont informationnelles et les informations constructrices, tout déséquilibre, toute donnée en recherche, tout chevauchement perturbateur, toute confusion, concernant même des trajets ou des aires cérébrales parfois très éloignés, crée une attente, le plus souvent non présentielle. Alors un jour un événement plus ou moins endotropique (une rencontre de calculs ou d'imaginations) ou exotropique (la pose du pied sur le marchepied de l'autobus) suffit à déclencher l'invention, c'est-à-dire un nouvel équilibre stable ou excité. Le cerveau du mathématicien créateur pourrait être décrit comme celui qui, dans domaine des index et des indexations pures, est le siège de beaucoup d'attentes ou de déséquilibres à forte pente, et qui aussi ne laisserait pas passer inaperçues leurs rééquilibrations complètes, partielles, transitoires quand elles surviennent, les thématiserait, les presserait pour en tirer le maximum de conséquences.

La sensibilité aux effets de champ perceptivo-moteurs et logico-sémiotiques semble jouer là un rôle essentiel. Il est rare que des inventeurs mathématiques n'aient pas eu un intérêt très vif pour un art, ou musique, ou poésie, ou peinture, parfois les trois. Ils auraient alors en propre la faculté double d'activer puissamment les effets de champ et de les refroidir aussitôt et autant. Eilenberg, initiateur de la théorie des catégories, se proposa une année de consacrer son cours de Columbia à la peinture chinoise, sans doute le plus grand réservoir d'effets de champ.

3. Les appels à l'invention

Mais, à côté de ces dispositions internes, on notera quelques stimulations extérieures assez habituelles pour que l'anthropogénie les ait à l'esprit.

a. Les problèmes techniques et physiques

Homo est d'abord technicien, et le mathématicien a presque toujours répondu, comme Homo en général, à des demandes plus ou moins urgentes de l'environnement technicisé par lui, le *woruld germanique.

Les premières mesures de surface et de capacité, propres aux empires primaires naquirent de l'arpentage des champs et du stockage des blés et des huiles. Les Pythagoriciens considérèrent les problèmes d'accord des cithares grecques. Descartes, en un siècle de lunettes et de microscopes, considéra les diffractions de rayons lumineux au passage d'un milieu transparent à un autre. Desargues et sa géométrie projective la construction économique des bâtiments. Le calcul infinitésimal les trajectoires des boulets et des planètes sous l'effet de gravitations. Le calcul des probabilités la théorie des erreurs dans les mesures physiques. La géométrie symplectique (plekeïn, syn, tisser ensemble, entrelacer) les formes des mouvements de corps soumis à des attracteurs multiples, comme les planètes à gravitations interagissantes. La géométrie fractale les phénomènes de cristallisation et de vascularisation, les textures en tant qu'opposées aux structures. Etc.

b. Les disponibilités instrumentales

De même, de nouvelles machines de calcul, de traçage et de repérage, d'écriture et réécriture ont presque toujours proposé de nouvelles constellations des index purs qu'on y introduit ou qu'on en sort. Ainsi, la théorie du nombre chez Pascal et sa machine à calculer renvoient intrinsèquement l'une à l'autre. Aujourd'hui, les computers n'ont pas été pour rien dans la création de nouvelles branches du calcul numérique. Ou aussi dans la vérification de la non- prédictabilité à long terme de systèmes réputés stables, comme le système solaire. Ou encore dans des suggestions concernant les fractals.

c. Les malaises théoriques

Certains appels tiennent à la mathématique elle-même. Ils sont de deux sortes. (a) Les uns tiennent en des obscurités inhérentes à l'objet mathématique lui-même, comme la quadrature du cercle ou le statut du "cinquième postulat" d'Euclide. En ce cas, l'attente peut être longue avant que ne surgisse, sinon la solution, du moins la clarification. (b) D'autres appels résultent de la non-communication entre deux parties du système global qu'est la mathématique. Ainsi de la non-communication entre champ de la géométrie et champ de l'algèbre, dans leur état du XVIIe siècle, qui conduisit à la géométrie analytique ; ou des non-reliements entre les géométries qui menèrent à la généralisation de la notion de géométrie par Klein. En ce cas, la résolution est souvent rapide, et Eilenberg aime à dire que l'idée de catégorie, et même sa dénomination, était si attendue au moment où il la formula qu'elle était fatale, un peu plus tôt, un peu plus tard.

d. La connivence avec les sollicitations

Enfin, on on ne saurait aller jusqu'au bout du support de la mathématique par la physique et la physiologie, sans y remarquer les accointances de ses inventions avec le parti d'existence ou le fantasme fondamental du mathématicien comme organisme et système sémiotique singuliers.

Euclide proposant son "postulat-axiome" à partir de deux angles droits nous en a prévenu. C'est dans le système nerveux vertigineux de Pascal qu'on trouve sans doute à la fois ses lancinantes interrogations sur le vertige, sa rhétorique des deux infinis, son idiolecte à retournements incessants et foudroyants, et la préfiguration, que lui reconnaît Leibniz, du calcul infinitésimal à travers ses travaux sur les coniques. Descartes parle sans cesse de son obsession d'une vision instantanée, se passant de mémoire, et requérant ainsi une algébrisation de la géométrie et une géométrisation de l'algèbre qui sont la géométrie analytique ; Baillet lui attribue une extrême acuité de la vision nocturne. La perception de leur corps semble avoir été intense chez certains topologistes : René Thom, qui a écrit un texte fondamental sur la danse comme "sémiurgie", insiste sur les 5 dimensions d'espace dégagées par les 3 translations et les 2 rotations des mains jusqu'au poignet, et Poincaré, remontant jusqu'à l'épaule, en relevait davantage.

Du reste, c'est Poincaré qui remarquait que, devant un même objet et un même concept mathématiques, il y a une approche "géométrique" et une autre "algébrique". On peut croire que les "géomètres" de Poincaré analogisent aussi loin que possible, tandis que ses "algébristes" digitalisent aussi loin que possible, quitte à ce que les deux populations se chevauchent. Ces deux tempéraments sont sans doute à la base de l'aversion de certains, comme René Thom, pour des démonstrations qui leur semblent fastidieuses, alors que d'autres, outre la sécurité, en attendent de nouvelles suggestions.

Mais tout ceci encore, notera l'anthropogénie, n'a lieu que parce que la mathématique est la théorie pure des indexations et des index. En fin de compte, l'invention comporte à la fois le moment de passion et de pulsion où les traits-points sont réactivés avec leur charge et leur effet de champ attenants ; et le moment où ces charges sont refroidies pour obtenir le statut d'index et d'indexations purs. La coexistence de ces deux moments, dont aucun ne réduit jamais l'autre entièrement, se vérifie dans le fait que tout est formalisable en mathématique sauf justement le mouvement traçant ou pointant : tend vers. Il existe une photo du corps, du visage, du regard de Poincaré qui donne à pressentir quelque chose de ce double mouvement.

F. LES PRESTIGES DE LA MATHEMATIQUE

La mathématique entretient deux rapports à l'évolution d'Homo. D'abord, elle la suppose : point de mathématique sans la sélection des aires associatives (sensoriellement neutralisantes) du cerveau, sans l'éclosion de la stature transversalisante et du geste autour des deux mains planes, sans la vision angularisante et processionnelle, sans la pratique de la tecture et de l'ouïe proportionnante et échoïsante, ni non plus de l'image détaillée et des écritures transparentes.

En retour, la mathématique a vigoureusement fait avancer l'évolution d'Homo. En activant ses pouvoirs physiques, chimiques, biologiques. En étendant et animant par des idées régulatrices ses systèmes sémiotiques, en particulier ses tectures, ses images, sa littérature, sa musique. Mais aussi en fomentant chez lui des illusions exaltantes. Subliminales mais déjà très actives dans le cadrage néolithique. Actives et supraliminales dans le sous-cadrage spatio-temporel omniprésent des empires primaires. Franchement thématisées dans le pythagorisme, qui introduit le MONDE 2 grec. Et jusque dans les crises du néo-positivisme autour de 1900.

Au vrai, la mathématique est prestigieuse, c'est-à-dire qu'elle enlace Homo dans ses filets (stringere, étreindre, prae). Il importe à l'anthropogénie de voir que ces filets lui sont intrinsèques, et d'en faire une énumération suffisante pour mieux connaître simultanément la nature de la mathématique et l'éthos d'Homo. Dans le sublime comme dans le trivial. Dans le rare comme dans le quotidien.

1. La mathématique avoisine le JEU. - En effet, ses index sont des signes vides, hors situation, qui se prêtent à la délimitation et à l'irresponsabilité qu'on attribue au jeu. Et aussi à son plaisir rythmique.

2. La mathématique est PRESTIDIGITATRICE. - Le mathématicien propose des axiomes d'abord opaques, dont sortent ensuite des effets surprenants et invincibles, en une digitation preste (la presti-digitation) qui rappelle que "digit" en anglais désigne à la fois les dix doigts de la main et les dix chiffres de 0 à 9.

3. La mathématique se donne comme une SYNTAXE pure. - En effet, elle tient en une suite d'applications d'index sur index, et ceux-ci sont non sémantiques. C'est par là qu'un système mathématique est une tecture (architecture) entraînant un genre étrange d'habitation, où l'habitant s'enferme non seulement contre le froid et la pluie, mais contre toute situation concrète en général. Demeure ou refuge à l'abri des morsures de la Réalité et du Réel, tout en n'étant pas un rien ni un vide, puisque les indexations, leur élan et leur purification sortent de la stature d'Homo, de sa vision, de son cerveau.

4. La mathématique avoisine la MAGIE, c'est-à-dire qu'elle invite à passer de propositions in distans, sémiotiques, à des propositions in tactum, physiques. - En raison de l'équipollence entre indexations et index, puis entre brandir un index et donner un ordre, les indexations et les index purs passent facilement d'une activation cérébrale hypothétique à une production sémiotique performative. Quitte à ce que le monde ainsi suscité ait peu ou pas de rapport avec le monde des événements concrets.

5. La mathématique est une expérience d'AUTARCIE. - C'est que, tout à la fois, elle sait exactement de quoi elle parle (Borel), et ne sait pas du tout de quoi elle parle (Russell). En effet, ses index, étant des signes vides, en rigueur ne parlent de rien. Mais, étant en même temps des occasions d'applications et de fonctions montrables ou démontrables, ils forment une pratique où coïncident au moins idéalement le mot et le terme, le dialecte vivant et la langue fixée, le dialecte et l'écriture, le système et la structure. C'est même le seul cas où un système est entièrement engendré par sa structure, puisqu'il n'en va pas ainsi dans un organisme, ni dans un langage, ni dans une entreprise, ni dans une montagne. Il y a pour autant une parenté entre la mathématique et la folie, vu que le mathématicien est peu habitué aux résistances de la Réalité et du Réel, ou en tout cas étant peu enclin à se mouvoir dans leurs enchevêtrements, voire dans leurs contradictions, comme y oblige la vie ordinaire.

6. La mathématique invite à l'idée d'A PRIORI. - Kant voulait que la géométrie et l'arithmétique de son temps fussent composées de jugements

synthétiques a priori. Synthétiques, en ce qu'ils accroissent la connaissance, ce que ne fait pas un jugement analytique, où l'attribut est contenu dans le sujet. A priori, en ce que leur accroissement ne vient pas d'expériences physiques concrètes, lesquelles sont toujours en changement. En vérité, la mathématique n'est ni analytique ni synthétique au sens kantien. Ni non plus a priori ni a posteriori au sens kantien. Elle est une construction résultant de la purification et de l'absolutisation des index produits par le corps d'Homo. Ce qui lui donne un caractère expérimental : aventure qui avance et se contrôle par la cohérence pratique d'une écriture. Pourtant, dans ce cas, la résistance rencontrée par l'expérimentateur n'est aucunement celle des faits purifiés que rencontre le physicien, et moins encore celle des faits enchevêtrés que rencontre le politicien. D'où l'illusion entretenue d'apriorité.

7. La mathématique a des prétentions d'ETERNITE. - La mathématique construit des indexations, et donc des espaces, voire des espaces-temps, qu'elle déploie ; par quoi elle est donc historique. Cependant, les index et les indexations qu'elle a une fois posés et déployés restent directement accessibles à sa pratique, dans la mesure où ils sont des signes vides, et ne sont pas affectués par leur situs et leur situation ; par quoi elle est transhistorique après coup. Sauf erreur un jour constatable, ses différents moments une fois posés demeurent de soi inchangés, même quand ils sont repris, généralisés dans des saisies de plus en plus larges ; ainsi de la géométrie d'Euclide qui fut réassumée dans la géométrie de Klein, s'appuyant sur la notion de groupe de tranformations. Moyennant ces restrictions, il y a un sens à dire que la mathématique est un transcendantal en construction, par opposition au transcendantal préalable kantien.

8. La mathématique s'est souvent imposée comme ORIGINE. - Cela tient en partie à son indépendance des situations et des circonstances, et à un certain statut hors du temps. Mais sans doute aussi au caractère virtuel de ses propositions, relations d'indexations qu'on sent grosses d'autres relations d'indexations, grosses surtout de leur propre généralisation générative. Remontant jusqu'à la musique des sphères, chez les Pythagoriciens. Jusqu'à un ciel d'idées intelligibles, conçues comme "relations-proportions" chez Platon et Descartes. Jusqu'à un transcendantal, c'est-à-dire à un ensemble de conditions de possibilité de tout objet comme objet, chez Kant.

9. La mathématique figure le sublime, et en particulier la TRANSCENDANCE et l'IMMANENCE majusculées. Elle fournit même, du coup, des métaphores intimidantes, gestuelles, parlées et surtout écrites, pour tout ce qui est indescriptible, comme la présence-absence, la subjectivité, le sujet, le fantasme, le Réel excédant la Réalité. Mathématiser le psychologique et l'événementiel fut souvent un moyen de la simple intimidation ou de la franche paranoïa.

10. La mathématique s'est étymologiquement désignée comme la matHematikè tekHnè ou epistèmè, la technique ou la science qui concerne l'apprentissage, c'est-à-dire la MATHESE, action et désir de s'instruire.

G. LA LOGIQUE, OU INDEXATION PURE DES INDEXABLES SEMIOTIQUES

Il y a une autre discipline qui a un nom aussi radical que la mathématique, matHematikè tekHnè, c'est la logique, logikè tekHné, technique du logos.

1. Une notion extensible

La logique est alors aussi vaste que le logos dont elle est la technique. Elle décrit et évalue d'abord le raisonnement du discours, puis le discours comme tel, enfin la pratique sémiotique en général.

Aussi elle se distribue selon les trois dimensions du signe. (a) Elle envisage les rapports d'un signe avec les autres du même système ; ce sont les questions logiques syntaxiques, objets de la SYNTAXE (tatteïn, sun, ranger ensemble). (b) Mais aussi les rapports que, comme désignant, un signe entretient avec ses désignés : ce sont les questions logiques sémantiques, objets de la SEMANTIQUE (sèmaïneïn, atteindre une chose par un signe). (c) Enfin, les rapports du signe avec ceux qui le produisent, le reçoivent, l'échangent ; ce sont les questions logiques pragmatiques, objets de la PRAGMATIQUE (pratteïn, agir). Surtout dans l'usage anglais, le mot logics couvre habituellement ces trois domaines.

Tous les signes sont alors concernés. Car ces trois types de questions se posent quand un peintre produit une représentation quelconque ou quand il peint un cadre dans un cadre ; ou du seul fait que son cadre découpe de telle manière une situation représentée. Quand un sculpteur taille une image, et aussi quand il veut que sous sa taille apparaisse encore plus ou moins la matière qui reçoit l'image. Quand un musicien produit ses tons, mais également quand il exige ou n'exige pas le silence avant de commencer sa musique. Quand un architecte réalise et manifeste ou voile des fonctions d'habitation, ou qu'il cherche à préparer ses intérieurs par des façades, ou encore qu'il veuille que le passant ait sur une façade beaucoup de recul (Versailles) ou peu (palais dans les rues de Rome). Quand Homo erectus produit un biface qui hésite entre le pur outil et l'image massive.

Il y a donc autant de logiques que de domaines de signes, et même plusieurs logiques par domaines. Ainsi, les signes particuliers que sont les index de la mathématique appelèrent une logique particulière du fait que ce sont des signes vides, comportant surtout une syntaxe, sans pragmatique, et même sans sémantique, si on excepte les sémantiques construites à l'intérieur même de la mathématique.

Néanmoins, c'est le dialecte qui a suscité le plus immédiatement des questions logiques, vu qu'il a la propriété remarquable de désigner ses objets avec des degrés d'approximation, des modes d'existence, des catégories du possible, des réduplications (x en tant que x), des effets gigognes (je dis que je dis que je dis...), et qu'il peut encore parler de lui-même. C'est vrai que le langage gestuel a des performances semblables, et que sa maturation est presque identique pour l'ordre et pour le temps, mais le langage parlé a une communicabilité qui se prête davantage à l'examen. Et c'est bien du substantif logos dans son sens premier de parole et de raisonnement parlé ou écrit qu'a été dérivée la logikè teknè, puis le latin logica, qui a donné notre logique ; et c'est au sens restreint de logique du langage que pense spontanément le locuteur français, qu'il ait lu ou non la Logique de Port-Royal. Le logicien est même disposé alors à donner à logikos le sens tout à fait étroit que visait Aristote quand il opposait les syllogismes logiques (logikoï sulloguismoï), réductibles à des règles formalisables, aux syllogismes rhétoriques (rHètorikoï sulloguismoï), plus lâches et relevant de ce qu'on appelle aujourd'hui la logique de l'argumentation.

Ces flottements du vocabulaire ne sont ni fortuits ni paresseux, et tiennent à la nature des choses. Pour comprendre l'anthropogénie de la logique, il ne faudra pas négliger l'ampleur de son sens plein anglo-saxon de syntaxe, de sémantique et de pragmatique concernant tous les signes, mais avec une attention particulière au sens réduit et même strict qu'elle a eu en grec, et qu'elle a encore en français, de logique du discours, et en particulier du discours logique, par opposition au discours argumentatif.

2. Une pratique archaïque

Partons naïvement de signes qu'on trouve fréquemment dans les traités de logique (et de mathématique), et qui trahissent des opérations fondamentales, qu'il est commode de formaliser ainsi :

E pointe l'EXISTENCE, et "Ex" se lit "il y a un x qui" ;
A pointe l'ESSENCE, et "Ax" se lit "tout x", "quel que soit x", "pour tout x" ; et AxR(x) se lit "tous les x sont rouges" si "R(x)" se lit "x appartient à la classe des rouges", "x est rouge" ;
~ pointe la NEGATION, et "~p" se lit "négation de la proposition p".

Dans les mêmes traités, on trouve, entre ces trois opérations, des équivalences, <=>, dont voici les quatre admises par la logique classique, et où la logique intuitionniste n'admet que la quatrième :

A <=> ~E~   E <=> ~A~   E~ <=> ~A   A~ <=> ~E

Ce qui doit retenir l'anthropogénie, c'est que les opérateurs fondamentaux, E, E, ~n, <=>, sortent directement de la situation d'Homo transversalisant, indexateur, indicialisant, conceptualisant (associatif et neutralisateur). En effet, dans un champ indiciel plus ou moins neutralisé, pas d'indexation sans position d'EXISTENCE du pointé. Ni sans position d'ESSENCE minimale (l'appartenances à un ensemble) ou qualifiée (l'appartenance à une classe). Ni sans NEGATION explicite ou du moins possibilisée de ce qui n'est pas indexé. Ni sans EQUIVALENCES entre ces opérations.

Bien plus, à ces opérateurs des panoplies techniques, le in distans du geste sociotechnique et du signe a dû très vite adjoindre les opérations et opérateurs du conditionnel, propre aux protocoles techniques : "si...alors". Puis ceux, à la fois panopliques et protocolaires, qui distinguent le factuel, le possible, le certain, le probable, voire le nécessaire, objets de la logique théorique dite modale.

Ainsi, anthropogéniquement, les opérations logiques essentielles sont celles de la panoplie et du protocole. Et elles supportent ce qu'on appellera un jour, en termes savants, l'ontologie (logie de l'être) et l'épistémologie (logie du savoir certain), dont l'objet est de lier les existences, les essence, les événements (du protocole), leurs négations et leurs équivalences dans un environnement technicisé sur un horizon.

Somme toute, la logique théorique ne fait qu'exprimer et formaliser des opérations qui sont pratiquées d'instant en instant par tous les spécimens hominiens. Et, de même qu'un locuteur n'applique pas des règles grammaticales et lexicales, le technicien et le locuteur n'appliquent pas non plus des règles logiques. Celles-ci ont été extraites après coup de la pratique indexatrice, indicialisante, neutralisatrice et classificatrice d'Homo technicien et sémiotisant. Et d'autant plus tard que les opérations étaient plus complexes. La formalisation de la logique modale est toute récente.

Ainsi, sans aucune logique théorique, donc sans règles logiques, les enfants de sept ans se plaisent à des exercices sémantiques aigus, où de bouche à oreille, et dans l'hilarité générale, le jus de tomate devient le jus de cerveau, le jus de meuble, etc. jusqu'au jus de jus, qui déclenche une joie sans borne. Ils perçoivent sans faillir les quatre ou cinq retournements affirmatifs et négatifs de la phrase où leur grand-père se vante sentencieusement d'être le plus grand imbécile du monde. Ils ne sont nullement inquiétés par le prétendu paradoxe de "je mens", dont ils repèrent les diffractions en : "je viens de mentir dans ce que je viens de dire", "je vais mentir dans ce que je vais dire", "je suis menteur aujourd'hui ou à cet instant", "je mens toujours" au sens de "je mens presque toujours, souvent, parfois", sans compter les subtilités de "mensonge" comme mot et du mensonge comme acte, etc.

L'adulte ne perd ni cette compréhension ni ce goût, et s'il est un Crétois ordinaire, et non un sophiste crétois, il entend d'emblée dans la proposition "Tous les Crétois sont menteurs" ces autres propositions : "Le Crétois est menteur", "En Crète on ment comme on respire", "Ce n'est pas d'un Crétois qu'il faut attendre la vérité", "En Crète il n'y a que le mensonge qui soit riche", "La Crète c'est le Midi", "Exagération vaut mensonge", etc., dont les différences ne sont pas pour lui sous-jacentes, tant elles sont comportées par le dire en tant que dire. Ainsi, l'exercice logique fleurit dans toutes les civilisations, comme le confirme l'omniprésence du sourire, du rire, du fou-rire.

L'extrême élémentarité hominienne des opérations logiques et la virtuosité de leur pratique chez les enfants actuels font penser qu'elles durent intervenir très tôt dans l'anthropogénie, dès qu'Homo fut maître d'un langage massif et gestuel suffisants. Sans doute chez erectus. Voire chez des spécimens d'Homo habilis.

3. La théorie logique

Cependant, la pratique logique débouche sur l'exercice logique, puis la contestation logique, puis la théorie logique latente, puis la théorie logique déclarée. C'est ce qu'il faut suivre à travers l'anthropogénie.

a. Les logiques de l'échange du MONDE 1

Nous ne saurons jamais quel fut le degré de querelle logique d'Homo erectus, disposant sans doute du langage massif, ni d'Homo sapiens sapiens au paléolithique supérieur, disposant sans doute du langage détaillé. Mais les établissements au sol et plus encore les orchestrations topologiques des grottes peintes ont peut-être donné lieu non seulement à discussions (quatere, ébranler, dis, duo) moyennant une pratique et un exercice logique, mais aussi à de premières qualifications abstraites des propositions en conflit, en un pressentiment d'une théorie logique. Les hiérarchies des groupes de Primates, quand elles devinrent les instances de la famille et les rôles de la clientèle, purent avoir amorcé le même glissement.

En tout cas, les jetons de comptage du néolithique, c'est-à-dire les premiers échangeurs neutres, de même que le schématisme générateur des tectures cadrantes de Catal Hüyük se prêtaient à quelque calcul propositionnel en cas de différend. Les jeux logiques des sociétés actuelles sans écriture, tels les Esquimaux, où l'on voit la pratique logique passer à la règle logique, inciteraient à le penser. Mais le langage détaillé néolithique était-il assez mûr pour faire autre chose que pressentir le passage?

Enfin, une première théorie logique fut certainement instiguée par les écritures langagières et le sous-cadrage général à Sumer, en Egypte, en Chine, en Amérique pré-colombienne. Ecrites par mots, par lignes et par colonnes, les propositions du langage apparaissaient maintenant comme des blocs inversables, composés de sous-blocs inversables, ostensiblement transponibles, affirmables et niables. On imagine mal les prêtres égyptiens, si pointus dans la défense parlée et écrite de leurs dieux locaux, ne pas procéder à quelques formalisations logiciennes dans leurs querelles de théologiens.

b. Les logiques de l'être du MONDE 2

Mais tout ceci ne sort pas du continu proche du MONDE 1, et c'est avec le passage au continu distant du MONDE 2 que la logique théorique explosa en même temps que la mathématique. Dans la "bonne" distance du nouveau regard, scénique et théâtral, les figures dessinées par les cailloux (calculi, calculs) et les longueurs des cordes de cithare proposaient des harmonies (internes) et des analogies (externes) que les Pythagoriciens voulaient croire strictement décidables.

La logique ainsi mise en branle eut deux grands caractères. Elle donna au principe du tiers exclu un tranchant absolu ; et elle se prononça sur l'être en tant qu'être. En d'autres mots, elle fut à la fois une logique et une ontologie. Ou encore, elle se perçut comme l'instrument d'une épistémologie de l'être. Cela concordait avec les nouvelles tectures ambiantes, où les formes se prélevaient adéquatement sur les fonds, et avec une écriture devenue transparente et complète, où le désignant s'effaçait devant le désigné. La langue grecque utilisa toutes ses ressources syntaxiques de dialecte indo-européen pour crier aussi fort que possible l'opposition exclusive, l'implication nécessaire, la saisie intrinsèque, la saisie précisive, et même pour exiger, en un phénomène langagier unique, que toute phrase indique à son début son lien logique avec la précédente. La rigueur logique fit la dignité de l'Anthropos, en contraste avec le débraillé logique des dieux.

Presque d'emblée surgit le vers de Parménide : "l'étant est, le non-étant n'est pas". Les échos de cette culmination de l'ontologisme et de la disjonction retentirent durant tout le temps du MONDE 2. Car c'est bien l'être tranché que visent Platon, puis les néo-platoniciens, quand ils logicisent sur l'Un et le Multiple. C'est parce qu'il veut penser à la fois le devenir des vivants et leur appartenance à des genres éternels qu'Aristote édifie la théorie du syllogisme, où chaque phénomène singulier, énoncé dans une mineure, est subsumé sous une généralité, énoncée dans une majeure, pour obtenir une vérité comme correspondance de l'intellect et des choses ; et c'est comme biologiste ontologisant qu'il est conduit à distinguer pour les propriétés leurs signes seulement extrinsèques (semeïa) et leurs signes intrinsèques (tekmèria), et spécule du même coup sur le contingent et le nécessaire. C'est encore parce qu'ils estiment que le monde est une consécution d'états A et B reliés par une causalité ontologique que les stoïciens édifient leur logique du "si...alors", avec sa conséquence vraie : si non-B alors non-A ; et sa fausse conséquence (fallacia consequentiae) : "si non-A alors non-B". Et les médiévaux déclencheront une des batailles logico-ontologiques les plus vives et les plus longues de l'histoire hominienne, celle des réalistes et des nominalistes, parce que leur ontologie avait besoin de savoir si la généralité des mots n'était qu'une commodité du langage ou bien exprimait quand même une certaine généralité des choses, les rendant ainsi intelligibles comme l'oeuvre d'une pensée divine ; ce problème taraudait encore le logicien américain Peirce autour de 1900. Enfin, c'est par un autre croisement d'ontologie et d'épistomologie, et même le plus étroit, que Descartes balaya toutes les logiques antérieures, estimant qu'il n'y avait qu'à faire attention, à parler clair, à se souvenir de ce qui a été dit, bref à avoir de la "méthode" et du "bon sens", pour toucher l'existence du "je suis" avec ses conséquences de plein fouet.

La logique disjonctive ontologisante donna lieu en Occident à un véritable héroïsme logique, aussi intense et moins aléatoire que l'héroïsme militaire. Car c'est héroïquement que Zénon, prenant Parménide au pied de la lettre, conclut que le mouvement, vu qu'il implique du non-être successif, est un opinion (doxa) et non un "étant étantément étant" (on ontôs on) : pensons-y, la flèche ne parviendra jamais jusqu'au mur, puisque après avoir parcouru la moitié de la distance, elle devra parcourir la moitié de la distance restante, et ainsi de suite ; de même, Achille ne rejoindra jamais la tortue, puisque quand il sera là où elle était quand il est parti, elle sera déjà plus loin quand il repartira, et ainsi de suite. A la fin du MONDE 2, Bergson proposera encore des réponses à Zénon.

Et c'est toujours l'héroïsme logique qui, lors de l'avènement du christianisme cocréateur au début du XIe siècle, produisit l'argument ontologique chez saint Anselme. On y voit des mots-concepts convenablement choisis et disposés à exprimer une essence impliquant une existence, celle de Dieu. Thomas d'Aquin, puis Kant, dénonçèrent ce passage, mais leur critique passe sans doute à côté de la cible. En effet, c'était toute l'épistémologie latente du MONDE 2 qui invitait à croire que les concepts ou idées étaient vraiment dans l'être, de l'être, en particulier comme acte de cet portion remarquable de l'être que sont les esprits. En sorte que les idées d'infini pour Anselme, de parfait pour Descartes, de substance pour Spinoza, de nécessaire (ce qui ne peut pas ne pas être) pour Leibniz semblaient appartenir déjà, par leur statut d'idées en acte, à l'être existant, et n'avaient plus alors qu'à être sondées pour que s'y découvre Dieu non seulement comme essence envisageable, mais comme essence vraiment possible, laquelle, pour être ainsi possible, impliquait en ce cas l'existence réelle, spontanée, - puisqu'il était (ontologiquement) contradictoire que pareil être ait une cause extérieure à soi.

Du reste, Kant crut lui aussi à une géométrie vraie-décidable, à une arithmétique vraie-décidable, à une physique vraie-décidable. Et cela à partir d'une esthétique (des formes a priori de la sensibilité) et d'une analytique (des catégories de l'entendement) qu'il déclare transcendentales, c'est-à-dire préalables à la saisie de tout objet (réel) comme objet (réel).

Enfin, Hegel proposa le paroxysme du MONDE 2, puisque chez lui la logique engendre l'ontologie, et l'ontologie est devenue une logique en mouvement. Du coup, la pratique et la théorie logiciennes ont le pathétique d'une histoire ; non seulement toute détermination est négation, comme chez Spinoza, mais la négation est tragique, et souvent sanglante. Dans le meilleur des cas, elle traduit le creux d'un vide, d'un appel, d'un manque, qu'un siècle plus tard, quand on renoncera à le combler, on dira existentiel.

Cette conclusion pathétique des logiques du MONDE 2 a l'intérêt de rappeler à l'anthropogénie le mouvement général de la logique, qui va vers une pureté de plus en plus pure, comme sa soeur mathématique, mais en continuant toujours de se propulser à partir de la charge (carricare, véhiculer) physique et sémiotique des index et des indices, charge qui fait d'eux, moyennant leurs effets de champ perceptivo-moteurs et logico-sémiotiques, les fondements derniers du pouvoir, de la pulsion de pouvoir, et du reste de tout pathos d'existence <***>. Par exemple, katègoreïn, d'où vient catégorie, voulut dire blâmer, accuser en justice, trahir-dévoiler, avant de signifier attribuer, affirmer.

c. Les logiques des termes du MONDE 3

C'est avec cet ontologisme latent mais constant du MONDE 2 qu'Homo autour de 1900 va commencer de rompre, à travers bien des ambiguïtés.

Les ruptures se produisirent d'abord, nous l'avons vu, dans la mathématique, à l'occasion de l'axiomatique, où la notion de vérité fut remplacée par celle de cohérence ou consistance, visant non le rapport d'un système de signes à une réalité extérieure, mais le fait qu'il n'implique pas de contradiction interne. Ceci conduisit à se demander si cette cohérence était elle-même décidable, et à conclure bientôt qu'elle ne l'était pas à l'intérieur d'un système pas trop pauvre, contenant par exemple l'arithmétique : "On démontre que dans l'arithmétique on ne pourra jamais démontrer qu'elle est cohérente", "Dans l'arithmétique on peut toujours énoncer une proposition indécidable" (Gödel, 1931). En effet, cette démonstration suppose une formalisation, laquelle ne peut s'opérer que moyennant un métalangage (langage sur un langage) où l'on construira d'éventuels modèles, dont Tarski a fourni à la fois des exemples et une théorie.

Parallèlement, furent édifiées des logiques diverses : faibles, minimales, modales, épistémiques, etc., dont certaines se montrèrent mathématiquement fécondes. Par exemple, la logique intuitionniste permit d'interpréter l'axiome de Kock-Lawvere, portant sur l'ensemble D des éléments de carré nul dans l'anneau R modélisant la droite, et permit de construire une géométrie différentielle synthétique. En ce cas, la logique générale, opérant comme logique axiomatisée de la mathématique, faisait avancer une mathématique déjà axiomatisée (Lavendhomme, Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry, 1996).

Ces logiques mathématiciennes eurent des contrecoups dans la logique langagière. (a) Dans la syntaxe, dès le début du XIXe siècle, les algèbres de Boole avaient montré comment la disjonction, la conjonction, la négation peuvent s'exprimer respectivement comme réunion, intersection, complémentation ; les logiques des quantificateurs raffinèrent ce dispositif. (b) Dans la sémantique, sur la lancée de la "caractéristique universelle" de Leibniz, des efforts furent faits pour définir des "traits" sémantiques fondamentaux. (c) Dans la pragmatique, des logiques modales apportèrent des contributions indirectes à la distinction entre les dénotations et les connotations de l'interlocution. Cependant, dans la plupart de ces cas, ce que le logicien parvenait à formaliser, par exemple sur le nécessaire et le contingent, resta très en deçà de la subtilité des locuteurs courants, et plus encore des locuteurs raffinés qu'étaient par exemple les théologiens médiévaux.

Tarski a montré, dans les années 30, que si le langage courant comportait le mot "vrai" et l'appliquait pertinemment à ses propres énoncés, on ne pouvait formaliser cette situation et introduire formellement un tel prédicat de vérité. Voici quelque chose de son argumentation. Partons de la supposition que la proposition la neige est blanche est vraie si et seulement si (ssi) la neige est blanche ; ce "ssi" est la moindre des choses qu'on puisse exiger s'il s'agit de décidabilité. Or, en appliquant cette exigence à la proposition "je mens", cela donne : la proposition je mens est vraie si et seulement si (ssi) je mens. Ce qui est inconsistant, puisque, si la proposition "je mens" est vraie parce qu'elle émane vraiment d'un menteur, elle est fausse pour la même raison.

Et en effet, comme l'anthropogénie du langage le montre bien, le locuteur qui dit que la neige est blanche ne pense, ne communique, ne ressent nullement que "la proposition la neige est blanche est vraie si et seulement si (ssi) la neige est blanche" ; en d'autres mots, il ne croit nullement qu'elle soit décidable au sens des formalismes et des terminismes. Il émet, au contraire, un certain nombre de mots destinés à obtenir un certain effet concernant (cernere, cum) certaines performances en situation dans une circonstance sur un horizon <1B2-3>, par exemple celles d'une eau qui a formé des fractals moyennant une certaine vitesse de refroidissement et dont la blancheur prend des teintes très différentes selon qu'on est en train de parler de la retraite de Russie, où la neige était rougie du sang des mourants, ou de stations des sports d'hiver, où elle est noircie par les skieurs, à moins qu'elle soit rougie ou rosie par un coucher du soleil, etc. Ce vague efficace du dire est patent chez les locuteurs chinois, déclaratifs à cet égard. Mais aussi chez tous les locuteurs du monde.

Somme toute, il a fallu l'épistémologie disjonctive très particulière du MONDE 2, et un accès de malhonnêteté polémique contre les protestants, pour que Bossuet s'écrie sans broncher : "Il a dit ceci est mon corps, c'est donc son corps ; il a dit ceci est mon sang, c'est donc son sang." Comme, dans notre début du MONDE 3, il aura fallu l'impitoyable transformation des mots en termes par une linguistique traductionnelle visant à construire des machines de traduction, pour que des courants dits néo-positivistes s'avisent d'interroger la validité du langage courant à partir de la décidabilité, affaire de cohérence-consistance, plutôt qu'à partir de la vérité, affaire de réel-réalité, toujours relative, situationnelle, circonstancielle, en approximation provisoire, assurément dans la vie ordinaire, mais même dans la science la plus exacte, c'est-à-dire la plus purement indexatrice. Et cela par la nature des choses, et aussi par la nature du dire en tant que tel. Dire vient du latin dicere, de même racine que le grec deïknunaï, montrer. Montrer est à la fois plus humble et plus riche que démontrer. Il n'y a de décidabilité, et donc de démonstration stricte, que des signes vides que sont les index purs, et non des signes pleins, fuyants par leur prégnance même.

Le fait qu'aujourd'hui un très grand nombre de phrases contenant les mots "vérité" et "dire" sont sémantiquement mal formées, c'est-à-dire laissent flotter de quelle vérité et de quel dire on parle, est un symptôme parmi d'autres des difficultés qu'il y aura eu pour les spécimens hominiens à passer du continu distant du MONDE 2, où en Occident ils sont encore à demi immergés, au discontinu du MONDE 3, où ils émergent à peine.

Elles prouvent peut-être aussi tout simplement la difficulté générale qu'il y a pour Homo à saisir la nature du dialecte comme tel, qui est sa ressource la plus large, et donc aussi la plus difficile à cerner, parce que c'est un système où les structures ne s'exercent qu'en se signifiant provisoires, où les restructurations sont sans cesse aussi considérables que les structures. Ceci fait l'humour de tout langage qui demeure courant ou naturel. L'humour est la perception et l'exercice communs aux interlocuteurs du caractère protéiforme de toute interlocution. Dès que le logicien du langage oublie d'être humoriste il rencontre la folie et la paranoïa sous leur forme non seulement ordinaire, propre à tout spécimen hominien, mais sous une forme aiguë. Celle qui a menacé Gödel et épié Wittgenstein.

* * *

Somme toute, comme la pratique et l'exercice logiques sont connaturels à tout spécimen hominien, la théorie logique n'a guère fleurit que dans des moments de crise de l'épistémologie ou des moments de gloire de l'ontologie. Crise épistémologique du dialecte et du geste chez les sophistes grecs, des universaux chez les théologiens médiévaux, des fondements de la mathématique, des sciences exactes et plus généralement de la vérité tout au long du XXe siècle. Au contraire, chez Aristote et chez Leibniz, triomphe d'une ontologie neuve et puissante, que l'épistémologie venait confirmer et vulgariser.

****

Complément

René Lavendhomme

LA FLECHE

Il n'est pas indifférent à l'anthropogénie de s'arrêter au destin de la flèche à travers la mathématique et son écriture.

Au départ, il s'agit d'un outil, pointe de masse ou arme de chasse, mais comportant implicitement une image massive qui a la particularité d'indiquer un sens qui la déborde par sa fonction technique mais aussi par la sollicitation qu'elle exerce sur le système visuel d'Homo en raison de sa forme : par dessus les mains manipulatrices, le regard indexateur et indicialisant d'Homo y va vers la pointe.

Ensuite, sur les parois peintes du paléolithique, où elle apparaît comme image détaillée, la flèche est un trait-point complété d'une indication de sens par quelques autres traits-points obliques situés à son extrémité ou sur son corps. Là, à nouveau, l'indication temporelle d'un mouvement directionnel est obtenue par une polarisation du système visuel et par l'évocation d'une fonction technique, le percement. La charge rituelle, chasseresse ou sexuelle, est considérable.

En effet, avec son mouvement implicite, la flèche signe va d'un "ici" à un "là", lequel tantôt est particulier, comme un point d'arrivée concret, tantôt est général, comme un ailleurs. Dans les deux cas, elle déclenche un double effet de champ perceptivo-moteur rudimentaire. Car sa gravitation propre d'image visuelle y est ouverte (étirée), d'une part en raison de celle de l'attracteur "là", d'autre part en raison du mouvement corporel qu'elle induit du fait de son but visé, du fait aussi qu'elle est perçue comme ayant résulté d'un mouvement dirigé vers ce but physique ou mental, et qui fait qu'elle est le signe de piste par excellence.

* * *

Faisant suite au triangle des forces de Stevin (1586), dont descendra le parallélogramme des forces, la flèche image, dans la mathématique du XIXe siècle, a d'abord eu un statut géométrique. Comme il convenait à sa nature conductrice, c'est un vecteur (vehere, conduire en tirant), c'est-à-dire un segment comportant une origine et une extrémité qui ne sont pas interchangeables, et qui donc produisent un sens et une direction. Cependant, par exemple chez Chasles, les segments vectoralisés donnent lieu à une sorte d'algèbre (calcul) géométrique orientée. Et du coup l'apparition de la flèche nulle, forcée par l'algèbre, trahit qu'on est en train de sortir de la simple image.

Et en effet, avec l'élaboration ultérieure du calcul vectoriel, la flèche développe considérablement ses possibilités d'évocation, ou plutôt de désignation. Grâce à son sens et à sa longueur, la voici en état de représenter toutes les grandeurs intensives : vitesses, forces orientées. Par quoi se faisait jour une première géométrisation de la cinématique, voire de la dynamique du point.

Bien plus, ce premier glissement conceptuel accompli, on ne s'étonnera pas que la flèche ait écrit l'opération logique de l'implication, "si...alors", laquelle part d'un antécédent et aboutit à un conséquent. Cette fois elle perdait son statut géométrique : sa longueur n'importait plus, seule subsistait l'indication d'un point de départ et d'un point d'arrivée non situés spatialement et purement conceptuels. Avaient lieu une déspatialisation physique, puisqu'il ne s'agit plus d'étendue, et la création d'une sorte de spatialisation conceptuelle dans une écriture pure. Ceci évoque le titre de Frege de 1879 : Begriffschrift (écriture du concept).

* * *

On assista alors à une vraie révolution graphique : la flèche pour désigner la fonction. Etant donnés deux ensembles quelconques A et B, une fonction de A vers B est une correspondance qui à chaque élément a de l'ensemble A associe un élément b bien déterminé de l'ensemble B, élément que depuis Leibniz on note : f(a). L'invention d'écriture fut d'écrire :

<Figure 1>

Dans l'histoire de l'écriture mathématique, il n'y a eu que deux autres inventions de pareille importance. La première, antique, tint dans la mise en usage de lettres pour désigner des objets mathématiques. La deuxième, essentiellement à la Renaissance, tint en de nouveaux signes abréviateurs : = , +, etc.

La flèche désignatrice de fonction permettra une écriture bidimensionelle ou même tridimensionnelle. En effet, si

<Figure 2>

sont deux fonctions, on peut les composer en la fonction $g \circ f$, laquelle à chaque élément a de A associe l'élément c de C déterminé par $c = g(f(a))$.

On peut alors donner sens à une phrase comme : Le carré

<Figure 3>

commute. C'est simplement $v \circ f = g \circ u$

Et on peut du même coup écrire aussi une phrase comme : Si le cube

<Figure 4>

commute, et si toutes ses faces autres que la face supérieure ont la propriété P, alors la face supérieure a aussi la propriété P.

Quel est en l'occurence le statut du cube dessiné? Celui d'une phrase écrite, et non d'un objet extérieur à la langue. En présence du carré syllogistique des scolastiques, ou des cercles d'Euler, ou des graphiques en général, on se trouvait en présence d'un mixte d'écriture et de dessin, croisant une désignation macrodigitale et une désignation analogique. Au contraire, notre dernier cube appartient vraiment à l'écriture.

Et cela moyennant un effet de champ logico-sémiotique. Car, d'une part, l'ordre du macrodigital devient ici pluridimensionnel, il s'ouvre sur l'espace à l'intérieur de lui-même ; le cube dessiné est bien une phrase écrite. Mais, d'autre part, ce cube ne cesse pas pour autant d'être un dessin, une analogie de cube, avec ses faces et ses arrêtes.

* * *

Sans doute commençe-t-on là à pénétrer dans le MONDE 3 de l'écriture. Mais, pour y accéder pleinement, une étape restait à franchir. C'était d'abstraire la flèche de sa contiguïté avec la notion de fonction dans ce qu'elle comportait encore d'adhérence à la fonction concrète.

La nouvelle possibilisation a été de considérer que la flèche pouvait inscrire toute transformation adaptée à une situation mathématique définie. Lorsqu'un mathématicien s'intéresse à une structure donnée, il ne vise pas seulement la classe des objets munis de cette structure, mais aussi la classe des transformations adaptées à cette structure. Ainsi les topologues ne s'intéressent pas seulement aux espaces topologiques, mais aussi, et peut-être surtout, aux fonctions continues. Les opérateurs linéaires sont plus importants pour les algébristes que les espaces vectoriels. Les représentations, ou homomorphismes, de groupes sont au moins aussi fondamentaux que les groupes eux-mêmes. Et chacune de ces transformations, dans le contexte (la circonstance) d'une situation mathématique donnée, peut s'écrire comme une flèche.

On s'aperçoit alors que les classes de ces flèches, - classe des fonctions, classe des fonctions continues, classe des homomorphismes, classe des fonctions différenciables, etc., - ont elles-mêmes une structure algébrique originale. Dans chacune, la composée de deux flèches existe et est une flèche du même type. Dans chacune aussi, chaque objet est porteur d'une flèche "insignifiante", la flèche identité, c'est-à-dire la transformation qui consiste à laisser tout en place.

Pour leur composition, leur source, leur but, leur flèche nulle, la structure de ces ensembles de flèches devient une structure algébrique comme les autres. C'est ce qui, par une audace philosophique peu banale, due à S. Eilenberg et S. Mac Lane, a été nommé une catégorie. Le mot est très fort puisqu'il rattache ce thème mathématique fondamental à ce qu'Aristote avait appelé les catégories (aï katègoriaï) pour désigner épistémologiquement les différentes classes des prédicats qu'on peut attribuer dans un jugement à un sujet quelconque, grammatical ou réel ; et donc ontologiquement les différentes classes de l'être.

* * *

Mais, même dans une catégorie, on continue à noter des flèches par des flèches, et à dire que le carré déjà rencontré

<figure 5>

commute, c'est-à-dire que $v \circ f = g \circ u$, puisque les flèches se composent sans qu'on sache ce qu'elles "sont", si ce n'est des éléments composables d'une catégorie définie par ses axiomes.

Or ceci ouvre des perspectives très étranges, qu'on rencontre souvent dans la mathématique d'aujourd'hui. Je me contenterai d'un exemple montrant que l'on peut en arriver à dire qu'un concept est l'image en miroir d'un autre, et que cela fait sens. Ainsi appelle-t-on produit de deux objets A et B un objet P muni de deux flèches, u de P vers A et v de P vers B, tel que pour tout objet X muni également de deux flèches, f de X vers A et g de X vers B, il existe une et une seule flèche de X vers P faisant commuter le diagramme :

<Figure 6>

L'image en miroir de ce concept de produit est ce que l'on appelle une somme de deux objets A et B. C'est un objet Q muni de deux flèches u de A vers Q et v de B vers Q tel que pour tout autre objet X muni également de deux flèches, f de A vers X et g de B vers X, il existe une et une seule flèche de Q vers X faisant commuter le diagramme :

<Figure 7>

Il n'est pas nécessaire de savoir ce que pourraient bien être ces objets P et Q pour voir que ces concepts de produit et de somme sont reliés par une propriété purement graphique, purement scripturale, de retournement du sens des flèches. Nous avons donc ici un lieu, dans la mathématique même, où ce n'est pas simplement l'espace qui se mue en signe, mais le signe qui se mue en espace, de par la spatialité même de son écriture. On se trouve en un point d'interférence entre l'espace et la logique.

* * *

On pourrait faire un pas de plus dans cette direction. La flèche ne pourrait-elle pas subvertir la logique et jusqu'au concept d'ensemble?

Car, au niveau le plus élémentaire, la logique a un rapport avec le concept général d'ensemble. L'ensemble des parties P(M) d'un ensemble M est muni d'opérations (l'intersection, la réunion, le complémentaire) qui évoquent clairement les connecteurs logiques classique (la conjonction, la disjonction, la négation). Pour faire varier la logique, comme nous le suggère la flèche, il faut donc commencer par faire varier le concept même d'ensemble, ce qui conduit aux notions de faisceau et de topos.

Un topos est essentiellement une catégorie E (au sens défini plus haut) qui, outre quelques conditions élémentaires, permet d'associer à chacun de ses objets X un objet P(X), objet des parties de X, jouant à l'intérieur de E le rôle que joue l'ensemble des parties d'un ensemble dans le cas usuel des ensembles. Pour être un peu plus précis, prenons deux objets X et Y de E. Considérons l'ensemble des relations de Y vers X, c'est-à-dire l'ensemble des sous-objets du produit Y x X (au sens du mot produit que nous venons de décrire). Si nous étions dans les ensembles, une relation de Y vers X serait simplement un ensemble de couples (y,x) d'éléments de Y et X, tandis qu'ici il faut dire que c'est un certain sous-objet de l'objet Y x X. La condition sur l'objet P(X) est alors que l'ensemble des relations de Y vers X soit en bijection, de manière naturelle, avec l'ensemble des flèches de E allant de l'objet Y vers l'objet P(X).

Pour suggérer l'intérêt philosophique et donc anthropologique de ce concept de topos, considérons l'exemple simple des ensembles variants à deux états. Se donner un tel ensemble variant X c'est se donner ce qu'il était avant, disons X0, se donner ce qu'il sera après, disons X1, mais surtout se donner une fonction f indiquant pour chaque élément de X0 ce qu'il deviendra après dans X1 ; autrement dit, f indique pour chaque x0 de X0 quel sera f(x0) dans X1. C'est un peu alors comme si le changement intervenait au niveau même du concept d'ensemble. Un ensemble variant est globalement f : X0 flèche X1. Tout est décrit comme si les ensembles variaient avec un temps simplifié du type 0 flèche 1, c'est-à-dire un avant, un après, un unique changement, bref une unique transformation.

Dans cette situation très simplifiée, on a à la base la flèche comme un réel, ou comme un temps à deux états. Et on a, au-dessus de cette base, comme une superstructure tout un univers variant avec ses objets (ses ensembles) mais aussi sa logique et sa vérité. Par exemple,

dans les ensembles classique il y a un ensemble de valeurs de vérités Oméga = {0,1{ qui ne contient que deux éléments : le vrai, noté 1, et le faux, noté 0. On peut voir que pour les ensembles variants, - autrement dit dans le topos des ensembles variants, - il y a un ensemble variant de valeurs de vérité
Oméga = [Oméga : Oméga 0 Oméga 1] où

Oméga 1 (l'ensemble des valeurs de vérité d'après) est [O,1],
Oméga 0 (l'ensemble des valeurs de vérité d'avant) est à trois éléments Oméga 0 = [0,?,1],
et la fonction Oméga est décrite par
Oméga(0) = O, Oméga (1) = 1, Oméga (?) = 1.

Autrement dit, ce qui était vrai restera vrai, ce qui était faux restera faux, et ce qui était "?" deviendra vrai. Dans une sorte d'ailleurs absolu par rapport au temps et à l'univers qu'est en somme l'imaginaire du mathématicien, on pourrait donc dire que "?" correspond à la "valeur de vérité" : "cela ne se savait pas encore, mais cela deviendra vrai".

* * *

Cet exemple donne une petite idée de ce que peut être un topos. Mais, la base ne comportant qu'une seule flèche, il est simpliste. Il faudrait considérer un "temps" plus complexe, telle une base formée d'un "temps bifurquant" comme celui du schéma ternaire :

<Figure 8>

Ou un temps représenté par un ensemble ordonné quelconque. On peut aussi accepter diverses transitions entre les "instants" de ce temps généralisé et considérer, entre autres, un "temps" généralisé à seulement deux états mais à deux transitions :

<Figure 9>

Et dire même que la base peut être une catégorie quelconque. Ou finalement, en un sens qui serait à préciser, que la base est un "espace" ou un "site" quelconque.

C'est ce cas spatial qui fut au départ de la notion de topos telle que A. Grothendieck l'introduisit en 1960 pour les besoins de la géométrie algébrique. En 1965, F.W. Lawvere définissait son extension logique, et notamment le rôle privilégié de l'objet Oméga des valeurs de vérité. L'étymologie est riche de sens : le topos grec était un lieu animé par un événement : l'endroit qu'on foule, qu'on occupe, qui est le siège d'un mal, qui donne accès à ; du coup, dès Isocrate et Eschine, topos désigna le fondement d'un raisonnement quelconque, jusqu'au koinos topos, d'où vient notre "lieu commun".

Destin exemplaire que celui de la flèche, qui d'objet-outil passe à l'image massive, puis devient comme le paradigme de l'index. Elle déclenche un champ perceptivo-moteur, puis logico-sémiotique, pour constituer aujourd'hui, dans le MONDE 3, la base de tout système.

(25-6-1995 et 5-2-1996)